第7卷　第2期
1990年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.2
June, 1990

一种辨识多变量系统结构和参数的递推算法*

张俊芝　熊淑燕
(太原工业大学电机系)

摘要　本文基于Guidorzi方法，提出一种辨识多变量系统结构和参数的递推算法. 本算法通过对矩阵进行分解，根据分解过程中某参数的变化情况，判断矩阵的奇异性，从而辨识出系统的结构和参数，使得原来对矩阵求逆及求行列式的运算变为简单的代数运算，大大减少了辨识过程中的计算量. 数值实例表明了这种算法的有效性.

关键词：多变量系统；结构辨识；递推算法；分解；正定；奇异性

1. 一种新的结构和参数递推辨识算法

对于具有 r 个输入、m 个输出的多变量线性系统，总可以用如下形式的输入输出差分方程来表示[1]

$$y_i(k+v_i)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{v_{ij}}\alpha_{ijl}y_j(k+l-1)$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{v_i}\beta_{(v_1+\cdots+v_{i-1}+1),j}u_j(k+l-1),\qquad(i=1,2,\cdots,m)\tag{1}$$

其中 v_i 决定了系统 (1) 的结构，称为结构指标，并与系统阶 n 有关系

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=n.\tag{2}$$

另外有

$$v_{ij}=\begin{cases}\min(v_i+1,v_j), & j<i\\ v_{ij}, & j=i\\ \min(v_i,\ v_j), & j>i\end{cases}\tag{3}$$

多变量系统的结构辨识就是要从输入输出数据序列中辨识出结构指标 v_i，而参数估计则是要估计 α_{ijl} 和 β_{ij}.

1975 年 Guidorzi[1] 提出了一个利用输入输出数据直接确定结构指标v_i，进而进行参数估计的有效方法，在此方法的基础上，本文提出一种新的结构和参数递推辨识算法，对此简要介绍如下.

1.1 对称矩阵的分解

设 $A=\{a_{ij}\}$ 为一 $n\times n$ 的实对称矩阵，根据 [2]，如果 A 的由位于第 1，2，$\cdots$，k 诸行和同样序号的列上元素组成的行列式 Δ_k（简称 k 阶上主子式）$(k=1,2,\cdots,n)$ 不为零，则可将 A 分解为

---

* 山西省自然科学基金资助项目.

本文于 1988 年 11 月 3 日收到，1989 年 11 月 11 日收到修改稿.

$$A = LDL^T, \tag{4}$$

其中 L 为主对角线元素为1的下三角形矩阵，D 为对角阵

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots d_n). \tag{5}$$

L 和 D 的元素可以由下面的递推式来求.

$$\begin{aligned} & d_1 = a_{11}, \\ & l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} d_k) / d_j,\quad i = 1,2,\cdots,n-1,\quad i = j+1,\cdots,n, \\ & d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_k,\quad j = 2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{6}$$

可以证明，对实对称矩阵 A，按（6）式的递推算式进行分解．如果在分解过程中恒有 $d_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$，则表明 A 阵是正定的；若在分解途中出现某 $-d_i \leqslant 0$，则 A 不是正定的．因而通过 $d_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 可以判断 A 阵是否正定．当把这种判别方法用于多变量系统的结构和参数辨识中，就得到下面的递推算法．

1.2 递推算法

考虑由输入输出量测数据构造的矩阵

$$\left[\left| \begin{matrix} y_1(k) & y_1(k+1)\cdots \\ y_1(k+1) & y_1(k+2)\cdots \\ \vdots & \vdots \\ y_1(k+N) & y_1(k+N+1) \end{matrix} \right| \cdots \left| \begin{matrix} y_m(k) & y_m(k+1)\cdots \\ y_m(k+1) & y_m(k+2)\cdots \\ \vdots & \vdots \\ y_m(k+N) & y_m(k+N+1) \end{matrix} \right| \right.$$

$$\left. \left| \begin{matrix} u_1(k) & u_1(k+1)\cdots \\ u_1(k+1) & u_1(k+2)\cdots \\ \vdots & \vdots \\ u_1(k+N) & u_1(k+N+1) \end{matrix} \right| \cdots \left| \begin{matrix} u_r(k) & u_r(k+1)\cdots \\ u_r(k+1) & u_r(k+2)\cdots \\ \vdots & \vdots \\ u_r(k+N) & u_r(k+N+1) \end{matrix} \right| \right]$$

$$\triangleq [\ |\bar{y}_1(k)\bar{y}_1(k+1)\cdots|\cdots|\bar{y}_m(k)\bar{y}_m(k+1)\cdots||\bar{u}_1(k)\bar{u}_1(k+1)\cdots|\cdots|\bar{u}_r(k)\bar{u}_r(k+1)\cdots|] \tag{7}$$

引入记号 $R^o(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{m+r})$ 表示从（7）式中第 i 个子矩阵中取出前 μ_i 个 $(i = 1,2,\cdots,m+r)$ 列向量所构成的矩阵，例如

$$R^o(1,1,\cdots,1) = [\bar{y}_1(k)\bar{y}_2(k)\cdots\bar{y}_m(k)\bar{u}_1(k)\bar{u}_2(k)\cdots\bar{u}_r(k)], \tag{8}$$

$$R^o(2,1,\cdots,1) = [\bar{y}_1(k)\bar{y}_2(k)\cdots\bar{y}_m(k)\bar{u}_1(k)\bar{u}_2(k)\cdots\bar{u}_r(k)\bar{y}_1(k+1)]. \tag{9}$$

一般地

$$\begin{aligned} & R^o(\mu_1, \cdots, \mu_i + 1, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_{m+r}) \\ & = [R^o(\mu_1, \cdots, \mu_i, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_{m+r})\bar{y}_i(k+\mu_i)],\ i < m. \end{aligned} \tag{10}$$

在本递推算法中，记 R_i 为递推到第 i 步时的矩阵 R^o，R_{i-1} 为上一步的矩

阵 R^o，即

$$R_{i-1}=R^o(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m+r}), \tag{11}$$

$$R_i=[R^o(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m+r})\bar{y}_{j,\mu_j}]=[R_{i-1}\bar{y}_{j,\mu_j}], \tag{12}$$

其中

$$\bar{y}_{j,\mu_j}\triangleq\begin{cases}\bar{y}_j(k+\mu_j), & j=1,2,\cdots,m,\\ \bar{u}_{j-m}(k+\mu_j), & j=m+1,\cdots,m+r.\end{cases} \tag{13}$$

而 $R_1=\bar{y}_1(k)$. 令

$$S_i=R_i^TR_i. \tag{14}$$

在 Guidorzi 方法中，通过判断 S_i 的奇异性，即看 R_i 是否满秩来确定系统的结构参数（这里 R_i 中列向量的排列顺序与 Guidorzi 中的有所不同），但若注意到，当 R_i 为满秩矩阵时，对称阵 S_i 必为正定矩阵；否则，S_i 就是非正定的．因此，利用上一节所述的判断矩阵正定性的方法，也可以辨识得到系统的结构参数，其方法简述如下．

1）构造 R_i 矩阵，计算 $S_i=R_i^TR_i=\{s_{i,j}\}\quad(i=1,2,\cdots)$.

2）用下面算式求 d_i

$$l_{i,j}=\left(s_{i,j}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{i,k}l_{j,k}d_k\right)/d_j,\quad j=1,2,\cdots,i-1, \tag{15}$$

$$d_i=s_{i,i}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{i,k}^2d_k. \tag{16}$$

3）如果 $d_i\leqslant 0$，且 $R_i=[R_{i-1}\bar{y}_{j,\mu_j}]$ 中 $j\leqslant m$，则可确定出第 j 个子系统的结构参数 $v_j=\mu_j$. v_{ji} 也相应确定，并得到第 j 个输出分量对应的子系统的参数估计，

$$\hat{\theta}_j=S_{i-1}^{-1}R_{i-1}^T\bar{y}_{j,\mu_j}, \tag{17}$$

去掉 $\bar{y}_j(k+\mu_j)$，将（7）式中其它子矩阵中的向量添到 R_0 中，形成 R_{i+1} 进行下一步运算，即返回 1.

4）如果 $d_i>0$，则利用下列公式递推求出 S_i^{-1}.

$$S_i^{-1}=(L_iD_iL_i^T)^{-1}=(L_i^{-1})^TD_i^{-1}L_i^{-1}, \tag{18}$$

而

$$D_i^{-1}=\mathrm{diag}(1/d_1,\ 1/d_2,\ \cdots,\ 1/d_i), \tag{19}$$

$$L_i^{-1}=\begin{bmatrix}L_{i-1}^{-1} & 0\\ -l_iL_{i-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中

$$l_i=[l_{i,1}\quad l_{i,2}\cdots l_{i,i-1}], \tag{21}$$

l_i 的各元素由（15）式计算得到. 返回1.

2. 数值例子

以一个三输入三输出的以 Luenberger 规范形描述的多变量系统为例.

$$\begin{cases} \mathrm{x}(k+1) = A\mathrm{x}(k) + B\mathrm{u}(k), \\ \mathrm{y}(k) = C\mathrm{x}(k), \end{cases} \tag{22}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1241 & -0.3757 & 1.5000 & 1 & -2.2500 & 1.2500 & -0.1250 & 0.1250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1237 & 2.6239 & -1.5000 & 2 & -5.2500 & 4.2500 & -0.1250 & 0.1250 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.7514 & -0.7500 & 0 & 0 & -0.5000 & 0.5000 & -1.2500 & 2.2500 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5417 & 0.0417 & -0.9583 \\ 0.1251 & 0.6251 & -1.1250 \\ 1.2085 & 2.7085 & -4.2917 \\ 0.2919 & 0.2084 & -0.7083 \\ 2.3753 & 1.7918 & -3.3750 \\ 7.4587 & 5.8752 & -10.5417 \\ -3.6253 & -0.4583 & 0.3750 \\ -13.0419 & -0.8749 & -1.7917 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据〔1〕，将此规范形化为等价的如（1）式所示的输入输出差分方程，其各参数如表 1 所示. 用本文提出的辨识算法辨识此系统，得到三个子系统的结构指标分别为$\nu_1=3$，$\nu_2=3$，$\nu_3=2$. 这与原系统（22）是一致的. 在结构辨识基础上得到的参数估计值如表 1 所示.

数值实例表明本文所提出的递推算法是一种较为简单、实用的有效算法.

表 1

	参数真值	参数估计值		参数真值	参数估计值		参数真值	参数估计值
$\alpha_{11,1}$	−0.1241	−0.1249	β_{23}	−0.9583	−0.9576	β_{53}	−1.8000	−1.7969
$\alpha_{11,2}$	−0.3957	−0.3764	$\alpha_{21,1}$	−1.1237	−1.1252	β_{63}	−0.7083	−0.7059
$\alpha_{11,3}$	1.5000	1.5007	$\alpha_{21,2}$	2.6239	2.6222	$\alpha_{31,1}$	0.7514	0.7515
$\alpha_{12,1}$	1.0000	1.0012	$\alpha_{21,3}$	−1.5000	−1.4975	$\alpha_{31,2}$	−0.7500	−0.7501
$\alpha_{12,2}$	−2.2500	−2.2499	$\alpha_{22,1}$	2.000	2.0027	$\alpha_{31,3}$	0.0000	3.3771×10^{-4}
$\alpha_{12,3}$	1.2500	1.2496	$\alpha_{22,2}$	−5.2500	−5.2509	$\alpha_{32,1}$	0.0000	2.2571×10^{-4}
$\alpha_{13,1}$	−0.1250	−0.1241	$\alpha_{22,3}$	4.2500	4.2491	$\alpha_{32,2}$	−0.5000	−0.5005
$\alpha_{13,2}$	0.1250	0.1241	$\alpha_{23,1}$	−0.1250	−0.1234	$\alpha_{32,3}$	0.5000	
β_{11}	−0.6348	−0.6317	$\alpha_{23,2}$	0.1250	0.1232	$\alpha_{33,1}$	−1.2500	
β_{21}	−1.0523	−1.0487	β_{41}	−1.8844	−1.8782	$\alpha_{33,2}$	2.2500	
β_{31}	0.5417	0.5436	β_{51}	1.9437	1.9536	β_{71}	−5.5204	
β_{12}	0.0729	0.0733	β_{61}	0.2919	0.2955	β_{81}	−3.7713	
β_{22}	0.3021	0.3023	β_{42}	0.2397	0.2414	β_{72}	−0.6042	
β_{32}	0.0417	0.0415	β_{52}	0.9687	0.9694	β_{82}	−0.5625	
β_{13}	−0.3860	−0.3849	β_{62}	0.2084	0.2080	β_{73}	−2.0208	
β_{23}	1.2000	1.2014	β_{43}	0.8637	0.8660	β_{83}	0.7291	

参 考 文 献

〔1〕 Guidorzi,R.,Canonical Structures in the Identification of Multivariable System, Automatic, 11, (1975), 361—374.

〔2〕 詹重禧，一个用于对称矩阵的LR算法，计算数学，2，(1979)，155—162.

〔3〕 王秀峰、卢桂章，多变量系统的递推辨识算法，自动化学报，7，4，(1981)，274—282.

〔4〕 吴广玉主编，系统辨识与自适应控制，哈尔滨工业大学出版社，(1987)，117—124.

A Recursive Algorithm for the Identification of Structure and Parameter of Multivariable Systems

Zhang Junzhi, Xiong Shuyan

(Department of Electrical Engineering ,Taiyuan University of Technology)

Abstract: In this paper,a recursive identification algorithm for determinting structural indices and parameters of multivariable system is presented on the basis of Guidorizi's method. This algorithm is based on matrix decomposition by which the singularity of matric is determined according to the variation of a certain parameter is decomposition, therefore the structure indices and parameters of system are estimated.In the whole algorithm it is necessary neither to evaluate the value of determinant nor to inverse the matrix ,requiring only simple algebra operations. So,the amount of calculation is identification is greatly reduced . The validity of proposed algorithm has been proved by the results of digital simulation.

Key words: multivariable system; structure identification; recursive dlgorithm; disintegration; positivily; singularity