第7卷 第2期
1990年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.2
June, 1990

用输出反馈配置鲁棒极点的李雅普诺夫直接法*

姜 长 生
(南京航空学院自控系)

摘要 本文讨论了输出反馈配置线性多变量定常系统鲁棒极点的问题，提出了一种设计方法和有关定理，并用实例说明了该法的应用.

关键词：输出反馈；鲁棒控制；极点配置

1. 引　　言

系统设计中常常遇到的困难问题之一是对象的不确定性. 众所周知，利用输出反馈配置极点，其反馈阵不唯一，即还剩有设计自由度. 如果利用这种自由度实现闭环系统的正规化设计，使系统所配置的极点对受控对象的参数变化不敏感，从而使系统所配置的极点具有鲁棒性. 这是目前人们十分关心的研究课题之一，文〔3〕等在时域里取得了有益的成果. 本文讨论了另一种正规化设计方法，也取得了较好的效果.

2. 基本定理与设计算法

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{1}$$

其中 $A \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times p}$，$C \in R^{q\times n}$ 为常阵，不失一般性，设 $\mathrm{rank}B = p$，$\mathrm{rank}C = q$，p，$q < n$. 现取

$$u = Ky + v, \tag{2}$$

得闭环系统的状态方程

$$\dot{x} = (A + BKC)x + Bv = A_c x + Bv. \tag{3}$$

众所周知，若(A,B)可控，(A,C)可观，且有

$$p + q - 1 \geqslant n, \tag{4}$$

则闭环系统的全部极点均可以配置. 若条件 (4) 不成立，则总可以设计适当维数的动态补偿器，使增广系统满足 (4) 的要求，所以下面的讨论总假定条件 (4) 成立.

如果通过式 (2) 能将闭环系统矩阵A_c设计成正规阵，则闭环系统的极点具有鲁棒性. 对于矩阵A_c正规程度的评价可以考虑如下五种非正规程度的表达式

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1988 年 11 月 24 日收到. 1989 年 9 月 11 日收到修改稿.

不对称度 $\Delta(A_c)=\frac{\|A_cA_c^T-A_c^TA_c\|^{\frac{1}{2}}}{\|A_c\|}$, (5)

标架条件数 $K(W_{A_c})=\|W\|_2\|W^{-1}\|_2$, (6)

斜 度 $MS(A_c)=\|T\|/\|A_c\|$ (7)

标架失配置 $m(A_c)=\sup\limits_{Y,U,}\min\limits_{\Omega_i}\|U^*Y-\mathrm{diag}(e^{j\Omega_i})\|$ (8)

极分解不对称度 $\delta(A_c)=\frac{\|\Phi M_r-M_r\Phi\|}{\|A_c\|}$ 或 $\delta(A_c)=\frac{\|\Phi M_l-M_l\Phi\|}{\|A_c\|}$. (9)

式(5)～(9)中字母的含义与矩阵A_c的下列分解有关:

$$\begin{aligned}A_c&=W\Lambda W^{-1}(\text{特征分解})=S(D+T)S^*(\text{Schur三角分解})\\&=Y\sum U^*(\text{奇异值分解})=\Phi M_r=P\Theta P^*U\sum U^*=M_l\Phi\\&=Y\sum Y^*P\Theta P^*(\text{极分解}),\end{aligned}\tag{10}$$

式中 $\Theta=\mathrm{diag}(e^{j\Omega_i})$. 另外，其他鲁棒性指标，如鲁棒测度

$$v(A_c)=n^{-\frac{1}{2}}\|Q^{-1}\|_F,\tag{11}$$

也可以用来评价矩阵A_c的正规程度，其中$A_c=Q\Lambda Q^{-1}$,$Q=[q_1,q_2,\cdots,q_n]$, $\|q_i\|_2=1$, $i=1,2,\cdots n$. 若 A_c 正规，则 $K(W_{A_c})=v(A_c)=1$, $\Delta(A_c)=MS(A_c)=m(A_c)=\delta(A_c)=0$. 因此，式(5)—(9)和式(11)的数值越大，矩阵 A_c 的正规程度越差．

定理 1 若给定$P\in R^{n\times n}>0$, $N=N^T\in R^{n\times n}>0$, 则矩阵方程

$$P^TA_c+A_CP=-N\tag{12}$$

必存在唯一对称负定解A_c，且A_c可表示成

$$A_c=\int_0^{-\infty}e^{P^Tt}Ne^{Pt}\mathrm{d}t.\tag{13}$$

证明类似于文〔9〕定理3.6和3.7的证明，此处从略．本定理的条件$N>0$可以放宽，而结论仍然成立．

定理 2 若给定 $P\in R^{n\times n}>0$, $N=L^TL\in R^{n\times n}\geqslant0$, 且$(P,L)$为可观测对，则方程（12）必存在唯一对称负定解 A_c，且 A_c 可以表示成式（13）.

证明类似于文〔9〕定理3.6、3.7和3.9的证明，此处从略．

为了保证$\mathrm{Re}\lambda(A_c)<-\sigma$, $\sigma>0$, 现构造如下矩阵方程

$$P^T(A_c+\sigma I)+(A_c+\sigma I)P=-N\tag{14}$$

由此可知，$\mathrm{Re}\lambda(A_c+\sigma I)<0$, 即 $\mathrm{Re}\lambda(A_c)<-\sigma$. 考虑到 $A_c=A+BKC$，方程（14）可写成

$$P^TBKC+BKCP=-[N+\sigma(P^T+P)+P^TA+AP]=-\hat{N}.\tag{15}$$

利用Kronecker积将方程（15）写成

$$(P^TB\otimes C^T+B\otimes P^TC^T)\mathrm{rs}K=-\mathrm{rs}\hat{N}. \tag{16}$$

为简便计将方程（16）写成

$$\mathrm{Y}\mathrm{rs}K=-rs\hat{N}, \tag{17}$$

式中 $\mathrm{Y}=(P^TB\otimes C^T+B\otimes P^TC^T)\in R^{nn\times pq}$，$\mathrm{rs}K\in R^{pq\times 1}$，$\mathrm{rs}\hat{N}\in R^{nn\times 1}$ 分别为矩阵 K 和$\hat{N}$ 按行展开成的列向量．关于方程（17）的求解，分以下三种情况讨论．

情况(1) 有唯一解

引理 1　对于方程（17），若优选$P>0$，$N=N^T>0$，且如下条件成立

$$\mathrm{rank}\mathrm{Y}=\mathrm{rank}\,[\mathrm{Y},-\mathrm{rs}\hat{N}]=pq, \tag{18}$$

则方程(17)有唯一解.

引理 1 的结论是众所周知的，此处证略．显然，若引理 1 成立，则据定理 1 知，存在输出反馈阵 K，使闭环系统矩阵 A_c 正规，且 $\lambda(A_c)<-\sigma$.

情况(2) 最小二乘解

如果引理 1 不成立，则方程（17）的求解化为求解一个最小二乘问题．即给定 $P>0$，$N=N^T>0$(或 $N=L^TL\geqslant 0$，(P,L 可观)，也即给定 Y 和 $-\mathrm{rs}\hat{N}$，求 $\mathrm{rs}K$，使有

$$\min_{\mathrm{rs}K\in R^{pq\times 1}}\|\mathrm{Y}\mathrm{rs}K+\mathrm{rs}\hat{N}\|^2. \tag{19}$$

引理 2　线性最小二乘问题（19）的任何一个解 $\mathrm{rs}K$ 满足法方程

$$(\mathrm{Y}^T\mathrm{Y})\mathrm{rs}K=-\mathrm{Y}^T\mathrm{rs}\hat{N}, \tag{20}$$

如果 Y 是列满秩的，则方程（17）的线性最小二乘解是唯一的，且为

$$\mathrm{rs}K=-(\mathrm{Y}^T\mathrm{Y})^{-1}\mathrm{Y}^T\mathrm{rs}\hat{N}=-\mathrm{Y}^+\mathrm{rs}\hat{N}, \tag{21}$$

式中Y^+是Y的Moore－penrose广义逆.

引理2的证明可在有关教科书中找到，故略.

情况(3) 有约束的非线性最小二乘解

在最小二乘问题的式（19）中，矩阵 Y 和向量 $\mathrm{rs}\hat{N}$ 实际上是待定矩阵 P 和 N 的函数．在满足定理 1 或 2 的条件的前提下，若第一步使式（19）对参数矩阵 P 和 N 取极小，第二步再对 $\mathrm{rs}K$ 取极小，那么式（19）的最小二乘问题就化为如下有约束的非线性最小二乘问题:

$$\min_{P>0,N=N^T>0\in R^{n\times n}\,\mathrm{rs}K\in R^{pq\times 1}}\|\mathrm{Y}(p)\mathrm{rs}K+\mathrm{rs}\hat{N}(P,N)\|^2, \tag{22}$$

考虑到 $\mathrm{rs}K=-\mathrm{Y}^+(P)\mathrm{rs}\hat{N}(P,N)$，第一步可将式(22)化为

$$\min_{P>0,N=N^T>0\in R^{n\times n}}\|\,[I-\mathrm{Y}(P)\mathrm{Y}^+(P)]\,\mathrm{rs}\hat{N}(P,N)\|^2. \tag{23}$$

若令

$$Fz=[f_1(z),\cdots,f_{nn}(z)]^T=[I-\mathrm{Y}(P)\mathrm{Y}^+(P)]\,\mathrm{rs}\hat{N}(P,N), \tag{24}$$

式中 $z\in R^{l\times 1}$ 为矩阵 P 和 N 中所有待定元素排成的列向量，则式（23）的有约束的非

线性最小二乘问题就是在 $P>0$，$N=N^T>0$ 条件下，求泛函

$$J(z)=\frac{1}{2}(Fz)^T(Fz) \tag{25}$$

的极小值问题．根据文〔7〕§8.5，利用如下广义 Gauss－Newton 迭代公式

$$z^{k+1}=z^k-[F'(z^k)^TF'(z^k)]^{-1}F'(z^k)^TFz^k,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{26}$$

可求得泛函（25）的极小值点 z^*．这里，假定上式中的逆存在，$F'(z^k)$ 为关于变量 z^k 的 Frechet 导数，约束条件在 z 的各元素相互关系中规定（下同）．

也可以利用带有参数ω_k和λ_k的修正的广义Gauss－Newton迭代公式

$$z^{k+1}=z^k-\omega_k\,[F'(z^k)^TF'(z^k)+\lambda_kI]^{-1}F'(z^k)^TFz^k,\quad k=0,1,\cdots \tag{27}$$

求泛函（25）的极小值点 z^*．上式中，$F'(z^k)^TF'(z^k)\geqslant 0$，只要选入 $\lambda_k>0$，其中的逆总存在，还可以选择 ω_k，使 $J(z^{k+1})\leqslant J(z^k)$ 成立．

若式（26）和（27）中的 $F'(z^k)$ 难于计算，则可以用差商代替．为方便计算，式（26）和（27）中每一步计算矩阵逆〔$F'(z^k)^TF'(z^k)$〕$^{-1}$ 和〔$F'(z^k)^TF'(z^k)+\lambda_kI$〕$^{-1}$ 可以分别用第一步计算〔$F'(z^\circ)^TF'(z^\circ)$〕$^{-1}$ 和〔$F'(z^\circ)^TF'(z^\circ)+\lambda_0I$〕$^{-1}$ 来代替．当然，这是以牺牲收敛速度为代价的．如果既要减少计算量，又要收敛快，则式（26）和（27）可以分别改为如下两组迭代程序：

$$\begin{cases} z^{k,i}=z^{k,i-1}-[F'(z^k)^TF'(z^k)]^{-1}F'(z^{k,i-1})^TFz^{k,i-1}, \\ z^{k,0}=z^k,\quad z^{k+1}=z^{k,m},\quad i=1,2,\cdots,m;\ k=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} z^{k,i}=z^{k,i-1}-\omega_k\,[F'(z^k)^TF'(z^k)+\lambda_kI]^{-1}F'(z^{k,i-1})^TFz^{k,i-1}, \\ z^{k,0}=z^k,\quad z^{k+1}=z^{k,m},\quad i=1,2,\cdots,m;\ k=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{29}$$

上两式中，$m+1$ 为可以选择的收敛速度的阶数．

一旦由上述第一步求得式（23）有约束的非线性最小二乘解，得到参数矩阵 P 和 N 之后，第二步再将此 P 和 N 代入式（19）的线性最小二乘问题中，由式（21）得其解，即系统的输出反馈阵 K.

如下表达式

$$[J(z^{k+1})-J(z^k)]\,/\,J(z^k)\leqslant\varepsilon,\quad \mathrm{Re}\lambda(A_c)<-\sigma \tag{30}$$

可作为式（19）和（22）最小二乘问题的收敛条件，式中 ε 为给定的小正数．应当注意到，最小二乘问题中的相对极小值点可能在计算中得到，如果该点满足收敛条件（30），则该计算结果是可行的，否则计算应当继续进行．

迭代初值可选 $P_0=N_0=I$，$\sigma\geqslant\|\Delta A\|_2$，其中 $\|\Delta A\|_2$ 为方程（1）的矩阵 A 的最大摄动范数．根据以上讨论，显然如下定理成立．

定理 3　若线性定常系统 (A,B,C) 可控、可观，$p+q-1\geqslant n$，选定常数 $\sigma>0$，则式（25）取极小的优化计算，总能够选择到 $P>0$，$N=N^T>0$，使得方程（17）或有唯一解 K，或有最小二乘解 K，唯一解 K 可使矩阵 $A_c=A+BKC$ 达到正规，最小

二乘解 K 可以使矩阵 $A_c = A + BKC$ 接近正规，且两者均有 $\mathrm{Re}\lambda(A_c) < -\sigma$.

3. 设计实例

例 1　某实际系统的参数为

$$A=\begin{bmatrix}-1.74 & 0.211 & -1.103\\ 16.48 & -0.95 & -6.73\\ 0 & 0 & -20\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 6.73 & 3.5\\ 20 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

要求利用输出反馈阵 K，使系统有 $\mathrm{Re}\lambda(A_c) < -1$，并使 A_c 正规，或接近正规．

解　经验证，系统满足定理3的条件，现取 $\sigma = 1$，并优选矩阵 P 和 N 为

$$P=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0.1 & \\ & & 0.1\end{bmatrix}>0,\quad N=N^T=\begin{bmatrix}1.48 & -0.232 & 1.213\\ -0.232 & 1.143 & 1.346\\ 1.213 & 1.346 & 3.8\end{bmatrix}>0,$$

将矩阵 P 和 N 代入方程（17）得其唯一解 K 为

$$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0551 & -0.3365\\ -4.5423 & -1.0001\end{bmatrix},$$

如此有

$$A_c = A + BKC = \begin{bmatrix}-1.74 & 0.211 & -1.103\\ 0.211 & -6.715 & -6.73\\ -1.103 & -6.73 & -20\end{bmatrix},$$

$$\lambda_{1,2,3}(A_c) = -1.5, -4.13, -22.8.$$

可见 A_c 为正规阵，$\mathrm{Re}\lambda(A_c) < -1$，符合设计要求.

例 2　取自文〔3〕的例2

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4 & 5\\ 0 & -4 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

设计要求同例1.

解　经验证，系统满足定理3的条件. 同样取 $\sigma = 1$，然后优选出矩阵 P 和 N 为

$$P=\begin{bmatrix}0.06 & 0.05 & 0 & 0\\ -0.06 & 0.06 & 0 & 0\\ 0 & 0.01 & 0.06 & 0\\ -0.11 & -0.07 & -0.05 & 0.06\end{bmatrix}>0,\quad N=N^T$$

$$N=N^T=\begin{bmatrix} 3.58 & -0.03 & 0 & -0.99 \\ -0.03 & 3.58 & 0.09 & -0.63 \\ 0 & 0.09 & 3.58 & -0.39 \\ -0.99 & -0.63 & -0.39 & 3.58 \end{bmatrix}>0,$$

从而得方程（17）的最小二乘解为

$$K=\begin{bmatrix} 3.174769 & 1.926241 & 5.718445 \\ -1.798211 & 1.916056 & -2.955259 \\ -0.5480938 & 8.572588 & 23.88062 \end{bmatrix},$$

如此有

$$A_c=A+BKC$$

$$=\begin{bmatrix} -24.3457 & -12.39626 & -10.5067 & -5.966858 \\ -1.641163 & -9.619482 & 7.192844 & -4.11974 \\ 1.631094 & -0.9865189 & -10.69908 & 12.08163 \\ -0.6411629 & -10.61948 & 7.192844 & -3.11974 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \lambda_{1,2}(A_c)=-1.01917, \\ \qquad\qquad \pm j0.823667, \\ \lambda_3(A_c)=-19.4398, \\ \lambda_4(A_c)=-26.3059. \end{cases}$$

根据式(5)、(6)、(9)和式(11)，可得矩阵 A_c 的非正规程度和鲁棒测度为

$$\Delta_2(A_c)=0.693,\ \Delta_F(A_c)=0.630,\ K(W_{A_c})=19.921,$$

$$\delta(A_c)=0.557,\ \nu(A_c)=6.235.$$

在工程设计中，本文提出的配置系统鲁棒极点的方法具有一定的优点和实际意义．大量计算表明，本文的方法是有效的．

参 考 文 献

〔1〕黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，(1984)，155—195.

〔2〕Wilkinson, J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press, 1965，石钟慈等译，科学出版社，北京，(1987)，20—240.

〔3〕周其节、龙志扬，用输出反馈配置鲁棒极点，控制理论与应用，5，1，(1988)，18—24.

〔4〕Kautsky, J., Nichols, N. K. and Van Dooren, P., Robust Pole Assignment in Linear State Feedback, Int J. Control, 41, 5, (1985), 1129—1155.

〔5〕Davison, E.J. and Wang, S. H., On pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback, IEEE, AC—20, (1975), 516—518.

〔6〕Porter, B., Assignment of Closed—loop eigenvalues by the Direct Method of Liapunov, Int. J. Control, 10, 2, (1969), 153—157.

〔7〕Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative Solution of Non—Linear Equation in Several Variables, London: Academic Press, (1970), 35—250.

〔8〕Hung, Y. S. and MacFarlane, A. G. J., Multivariable Feedback: A Quasi—classical Approach, Springer—Verlag, (1982), 5—196.

〔9〕毛剑琴、姜长生、金西岳编著，控制系统的计算机辅助设计，北京航空航天大学出版社,(1988),74—76.

A Lyapunov Direct Method for Robust Pole Assignment by Output Feedback

Jiang Changsheng

(Depaitment of Automatic Control, Nanjing Aeronautical Institute)

Abstract: In this paper,discussion is devoted to the problem of robust pole assignment by output feedback in linear time—invariant multivariable system.A design method and the theorems Concerned with it are given ,the examples are illustrated for the application of this method.

Key words: output feedback; robust control; pole assignment

控制理论专业杂志概述*

陆吉林　　　　林云裳

(复旦大学数学系，上海)（中山大学数学系，广洲）

61. Реферативный журнал: Автоматика, Телемеханика и вычисли—тельная техника（文摘杂志综合本：自动装置、遥控和计算），1963—，月刊，苏联科学技术情报研究所编辑，刊载世界各国有关自动化装置、遥控和计算机技术的专利和书刊文献的摘要.

62. Управляющие системы и машины（控制系统与机械），1972—，双月刊，苏联乌克兰共和国科学院控制论中心编辑，内容有控制系统的一般问题，电子计算机和控制系统的设计和制造自动化，自动控制系统的新技术、新设备等.

63. オートメーション（自动化），1956—，月刊，日刊工业新闻社出版，介绍自动控制和自动化技术的应用，以及有关的专业知识等.

64. システムと制御（系统与控制），1957—，月刊，日本自动控制协会主办，原刊名为《制御工学》，1971年改为现名，刊载系统工程和自动控制理论及其应用的研究论文，技术报告，研究简报，综述文章等.

65. 计测と制御（计测与控制），1962—，月刊，日本计测自动控制学会主办，侧重于自动控制理论方面的研究，刊载有关的研究成果，学术动态，评论和资料介绍.

66. 计测自动制御学会论文集（计测自动控制学会论文集），1965—，月刊，日本计测自动控制学会主办，刊载会员撰写的研究报告，专题讨论等.

参　考　文　献

〔1〕Tzafestas, S., Information Sources in Systems and Control, in: Systems and Control Encyclopedia, Pergamon Press, Oxford, (1987), 5575—5585.

〔2〕MathSci User Guide, American Mathematical Society, Providence, (1986), Chapter 3: 1—154.

〔3〕Ulrich's International Periodicals Directory, 26th Edition, R. R. Bowker Company, New York, (1988).

〔4〕外国报刊目录，第7版，中国图书进出口总公司，北京，(1988)，1691—1705.

* 本文1—22条刊于本刊1989年第3期，23—60条刊于本刊1990年第1期.