第7卷 第2期
1990年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.2
June, 1990

时滞线性系统时滞独立稳定的劳斯-赫维茨方法

吴冲锋 王浣尘
(上海交通大学系统工程研究所)

摘要 本文研究了滞后型线性时滞系统，给出了一个完全可计算的时滞独立稳定的代数充要条件，这个条件判别的全过程仅仅只需要计算二次劳斯表和一次赫维茨行列式，并且所有运算均在实数域中，具有简单性和实用性.

关键词: 时滞线性系统; 时滞独立稳定

1. 前 言

时滞线性系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+Cu(t),\ \tau\in R_{+}=(0,+\infty) \tag{1}$$

是一种常见的线性动态模型，其零解时滞独立稳定性（以下简称稳定）的研究已有不少文献[1—5]．其中文献〔1，4〕讨论了稳定性充分条件；文献〔2，3，4〕虽然给出了稳定性充要条件，但没有给出仅用劳斯-赫维茨判据组成的实用代数判别方法；况且文献〔3〕中还存在着一定错误[4]，它的结论实际上仅是一种充分条件．本文的目的是给出一个完全可计算性的代数充要条件，对于这个条件的判别仅仅需要使用人们非常熟悉的劳斯-赫维茨判据，计算简单而实用.

2. 时滞独立稳定的代数判据

设特征多项式$L(s,e^{-s\tau})=\det〔sI-A-Be^{-s\tau}〕$. (2)

引理 1(见文献 [2]) 系统 (1) 时滞独立稳定 (delay－independent stability) 的充要条件是:

(Ⅰ) 对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有 $L(s,1)\neq 0$, (3a)

(Ⅱ) 对于任意 $\tau\in R_{+}-\{0\}=(0,+\infty)$ 和 $\omega\in R$，均有 $L(j\omega,e^{-j\omega\tau})\neq 0$, (3b)

其中 Re表示取实部，j 是虚数单位.

引理 2(见文献 [2]) 系统 (1) 时滞独立稳定的充要条件是:

(Ⅰ)对于任意$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有$L(s,1)\neq 0$, (4a)

(Ⅱ)对于任意$q>0$和$\omega\in R$，均有$L〔j\omega,(\frac{1-qj\omega}{1+qj\omega})^2〕\neq 0$. (4b)

为了给出 (4b) 式的简单判别方法，下面先证明几个引理．

本文于1989年4月18日收到，1990年1月19日收到修改稿.

引理 3　如果对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $\tau\in R_+$，均有 $L(s,e^{-s\tau})\neq 0$，则对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有 $L(s,0)\neq 0$.

证　(a) 对于任意 $\mathrm{Re}(s)>0$，有 $\lim\limits_{\tau\to+\infty}L(s,e^{-s\tau})=L(s,0)$. 由极限性质可得，如果对于任意 $\mathrm{Re}(s)>0$ 和 $\tau\in R_+$，均有 $L(s,e^{-s\tau})\neq 0$，则对于任意 $\mathrm{Re}(s)>0$，均有 $L(s,0)\neq 0$.

(b) 考虑 $s=j\omega$ 情况，不妨设有一对 $\pm j\omega_0$ 满足 $L(\pm j\omega_0,0)=0$.

1) 如果 $\lim\limits_{\omega\to\omega_0}\det[(j\omega I-A)^{-1}B]$ 无界，则存在一个 $\omega_1\in[\omega_0,+\infty)$ 使得 $(j\omega_1 I-A)^{-1}B$ 存在一个在单位圆上的特征根．因此必定存在一个 τ_1，使得 $[I-(j\omega_1 I-A)^{-1}Be^{-j\omega_1\tau_1}]=0$，即 $L(j\omega_1,e^{-j\omega_1\tau_1})=0$.

2) 如果 $\lim\limits_{\omega\to\omega_0}\det[(j\omega I-A)^{-1}B]$ 有界，则 $L(j\omega_0,e^{-j\omega_0\tau})=\det[j\omega_0 I-A]\cdot\det[I-(j\omega_0 I-A)^{-1}Be^{-j\omega_0\tau}]=0$.

由(a)和(b)则引理3得证.

引理 4　如果系统 (1) 时滞独立稳定，则对于任意 $\omega\neq 0$ 和 $|z|\geqslant 1$，均有 $L(j\omega,z^{-1})\neq 0$.

证　(a) 系统 (1) 时滞独立稳定，则对于任意 $\omega\neq 0$ 和 $|z|=1$，均有 $L(j\omega,z^{-1})\neq 0$，即没有关于 z 变量的零点落在单位圆上．

(b) 把 $L(j\omega,z^{-1})$ 展开，则

$$L(j\omega,z^{-1})=(j\omega)^n+\sum_{p=0}^{n-1}\alpha_p(z^{-1})(j\omega)^p, \tag{5}$$

其中 $\alpha_p(z^{-1})$ 为 z^{-1} 的多项式，很显然对于 $|z|\geqslant 1$，$|\alpha_p(z^{-1})|$ 有界，因此当 $|\omega|$ 足够大时，(5) 式不存在 $|z|\geqslant 1$ 的零点．

(c) 重新排列 $L(j\omega,z^{-1})$，则有

$$L(j\omega,z^{-1})=\sum_{p=0}^{K}\beta_p(j\omega)z^{-p}=z^{-K}\sum_{p=0}^{K}\beta_p(j\omega)z^{K-p}, \tag{6}$$

其中 $\beta_K(j\omega)$ 不恒为零，且其零点数不超过 n 个，$\beta_0(j\omega)=L(j\omega,0)$，由引理 3 可知，对于任意 $\omega\in R$，$\beta_0(j\omega)\neq 0$，则由 $L(j\omega,z^{-1})=0$ 所定义的隐函数 $z=z(\omega)$ 是一个关于 $\omega\in R-\{0\}$ 的多值连续函数．

由 (a)(b) 和 (c) 可得：对于任意 $\omega\in R-\{0\}$，$L(j\omega,z^{-1})=0$ 关于 z 的所有零点均落在单位圆之内．即引理 4 得证．

引理 5　如果系统 (1) 时滞独立稳定，则对于任意的 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $|z|\geqslant 1$，当 $s\neq 0$ 时，均有 $L(s,z^{-1})\neq 0$.

证　(a) 系统 (1) 时滞独立稳定，则对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有 $L(s,1)\neq 0$.

(b) 由引理 4，系统 (1) 时滞独立稳定，则对于任意 $|z|\geqslant 1$ 和 $\omega\neq 0$，均有 $L(j\omega,z^{-1})$

$\neq 0$.

由 (a) 和 (b)，则对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $|z|\geqslant 1$，当 $s\neq 0$ 时，均有 $L(s,z^{-1})\neq 0$.

定理 1 系统 (1) 时滞独立稳定的充要条件是:

(Ⅰ) 对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有 $L(s,1)\neq 0$， (7a)

(Ⅱ) 对于任意 $q>0$ 和 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有 $L(s,(\frac{1-qs}{1+qs})^2)\neq 0$. (7b)

证 充分性是显然的，当 $s=j\,\omega$ 由引理 2 可得.

必要性: 对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $q>0$，则 $|(\frac{1-qs}{1+qs})^2|\leqslant 1$，再由引理 5 可知，系统 (1) 时滞独立稳定，则对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $q>0$，均有 $L(s,(\frac{1-qs}{1+qs})^2)\neq 0$.

设
$$f(s,q)=\det[s(1+qs)^2I-(1+qs)^2A-(1-qs)^2B], \tag{8a}$$
则 (7b) 式的判别等价于对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $q>0$，均有 $f(s,q)\neq 0$. 把 (8a) 式进一步展开，写成如下形式:
$$f(s,q)=a_N(q)s^N+a_{N-1}(q)s^{N-1}+\cdots+a_0q. \tag{8b}$$
设 $g(q)$ 为 (8b) 式的赫维茨行列式，则
$$g(q)=\det\begin{bmatrix} a_{N-1}(q) & a_N(q) & & \\ a_{N-3}(q) & a_{N-2}(q) & & \\ & & & \\ & & & a_0(q)\end{bmatrix}$$
$$=(b_Mq^M+b_{M-1}q^{M-1}+\cdots+b_0)q^L=\bar g(q)q^L,\ b_0\neq 0. \tag{9}$$

定理 2 系统 (1) 时滞独立稳定的充要条件是:

(Ⅰ)对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有 $L(s,1)\neq 0$，

(Ⅱ)对于任意 $q>0$，由 (9) 式定义的 $g(q)=0$ 无正实根.

证 必要性是显然的，因为对于任意 $\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$ 和 $q>0$，均有 $L(s,(\frac{1-qs}{1+qs})^2)\neq 0$. 则有 $f(s,q)\neq 0$ 和 $\bar g(q)\neq 0$ 成立.

充分性: 对于任意 $q>0$，均有 $g(q)\neq 0$，表明了对于任意 $q>0$，$f(s,q)=0$ 不存在关于 s 变量在虚轴上的根，即对于任意 $\omega\in R$，均有 $L(j\,\omega,(\frac{1-qj\,\omega}{1+qj\,\omega})^2)\neq 0$. 再由条件 (Ⅰ)，充分性显然成立.

为了给出 (9) 式正实根的简单判别方法，设
$$g_1(q)=\bar g(-q^2)=\sum_{i=0}^{M}(-1)^ib_iq^{2i},\ b_0\neq 0, \tag{10}$$
则 (9) 式无正实根的判别等价于 (10) 式无虚根的判别. 而 (10) 式的判别则由引理 6 给出.

设 $\mathrm{Var}[g_1]$ 表示由 $g_1(q)$ 和其导数 $g_1'(q)$ 构成的劳斯表中第 1 列的符号变化数，则

有如下引理 6.

引理 6(见文献 [5]) 不妨设 $b_0>0$，则 $\sum_{i=0}^{M}(-1)^i b_i q^{2i}=0$ 无虚根当且仅当 Var〔g_1〕$=M$.

定理 3 系统 (1) 时滞独立稳定的充要条件是:

(Ⅰ)对于任意$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，均有$L(s,1)\neq 0$， (11$a$)

(Ⅱ)对于由 (10) 式确定的 $g_1(q)=\sum_{i=0}^{M}(-1)^i b_i q^{2i}=0$，有 Var〔$g_1$〕$=M$. (11$b$)

证明可以从定理2和引理6中容易得到.

注 1: (Ⅰ)和(Ⅱ)都只需要计算一次劳斯判别表，计算简单实用.

3. 实例计算

判别下列二维系统的时滞独立稳定性:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}x(t-\tau). \tag{12}$$

由 (12) 式可得其对应的特征多项式

$$L(s,e^{-s\tau})=s^2+2se^{-s\tau}+5s+5e^{-s\tau}+10. \tag{12a}$$

(Ⅰ)$L(s,1)=s^2+7s+15$，很显然对于任意$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，$L(s,1)\neq 0$，

(Ⅱ)$$f(s,q)=q^2s^4+q(7q+2)s^3+(15q^2+6q+1)s^2+(10q+7)s+15, \tag{13}$$

$$g(q)=\begin{bmatrix}q(7q+2) & q^2 & & \\ 10q+7 & 15q^2+6q+1 & q(7q+2) & q^2\\ & 15 & 10q+7 & 15q^2+6q+1\\ & & & 15\end{bmatrix}$$

$$=30q(525q^4+310q^3+67q^2+22q+7), \tag{14}$$

$g_1(q)=525q^8-310q^6+67q^4-22q^2+7$，其劳斯判别表如下:

q^8	525	−310	67	−22	7
q^7	2100	−930	134	−22	
q^6	−77.5	−33.5	−16.5	7	
q^5	−1837	−313	167		
q^4	20.3	23.5	7		
q^3	1813	801			
q^2	14.5	7			
q^1	−74.2				
q^0	7				

上述劳斯表中第 1 列符号变化数为 4，即 Var〔g_1〕$=4$，因此系统 (12) 时滞独立稳定.

参考文献

〔1〕秦元勋等，带有时滞的动力学系统的运动稳定性。科学出版社，北京（1963）.

〔2〕俞元洪，超越函数$\det[a_{ij}+b_{ij}e^{-\lambda\tau}-\delta_{ij}\lambda]_{n\times n}$的零点全分布在复平面左半部的代数判定，科学通报，29，23，(1984)，1413—1415.

〔3〕Kamen, E. W., On the Relationship Between Zero Criteria for Two-variable Polynomials and Asymptotic Stability of Delay Defferential Equations, IEEE Trans. AC-25, (1980), 983—984.

〔4〕钱振英，具有时滞一类大线性系统稳定性和分散镇定问题研究，上海交通大学博士论文，(1985).

〔5〕JURY, Inners and Stability of Dynamic Systems, John Wiley & Sons, INC. (1974).

The Routy-Hurwitz Method of Delay-independent Stability for the Linear Systems with Time-delay

Wu Chongfeng, Wang Huanchen

(The Institute of Systems Engineering, Shanghai Jiaotong University)

Abstract: In this paper, a complete computable algebraic necessary and sufficient condition, which determines delay-independent stability of the linear systems with time-delay, is given. A simple and practical method to test this condition is obtained by using twice Routh Criterion and computing once the determinant of Hurwitz matrix.

Key words: delay linear system; delay-independent stability