第7卷 第4期
1990年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 7, No. 4
Dec., 1990

H^2 最优控制器的不唯一性及闭环性能的改善

范玉顺　吴　麒　　　　王恩平
(清华大学自动化系,北京)　　(中国科学院系统科学研究所,北京)

摘要　本文研究了 H^2 最优控制器的不唯一性问题.给出了 H^2 最优控制器集合存在的条件,并给出了一种将多变量 H^2 最优设计问题化为一组单变量的 H^2 最优设计问题的方法.给出了最优控制器集合的参数化公式.本文还给出了利用最优控制器集合中的自由参数提高闭环系统鲁棒性能及求取稳定最优控制器的方法.实例表明,这种设计方法可以充分利用控制器的自由度,实现提高系统鲁棒性以及求取稳定控制器的目的.

关键词:H^2 最优控制器;不唯一性;鲁棒性;稳定控制器

符号说明:

H^2;$H^\infty \triangleq$ Hardy 空间

$\|y\|_2 \triangleq (\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y^*(j\omega)y(j\omega)d\omega)^{1/2}$

$\bar{\sigma}(A) \triangleq A$ 的最大奇异值

$\|A\|_\infty \triangleq \sup\limits_{\omega} \bar{\sigma}(A(j\omega))$

$R \triangleq$ {真,实有理}

$R^{p\times m} \triangleq$ {R 上的 $p\times m$ 维矩阵}

$M(R) \triangleq$ {R 上的矩阵}

$U(R) \triangleq$ {R 上的可逆方阵,$A\in M(R)$,$A^{-1}\in M(R)$}

$\delta(A) \triangleq$ {A 在右半平面零点个数,包括重数及无穷零点个数}

$T^*(S) \triangleq T'(-S)$

1. 引　　言

一般 H^2 最优设计问题可归结为图1所示标准控制结构问题.图中 G 为广义对象,w 为 n 维干扰向量,u 为 m 维控制向量,z 为 p 维调节输出向量,y 为 l 维测量输出向量,K 为控制器.

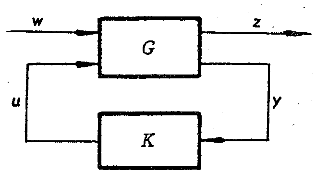

图1　标准控制结构框图

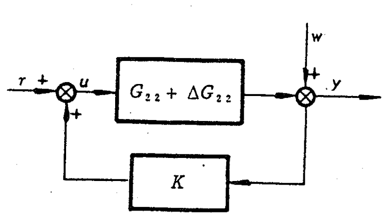

图2　线性控制系统框图

本文于1988年9月27日收到.1990年7月17日收到修改稿.

$$G=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

$$G_{11}\in R^{p\times n}, G_{12}\in R^{p\times m}, G_{21}\in R^{l\times n}, G_{22}\in R^{l\times m}, K\in R^{m\times l}.$$

$$z=G_{11}w+G_{12}u, \tag{1.2}$$
$$y=G_{21}w+G_{22}u, \tag{1.3}$$
$$u=Ky. \tag{1.4}$$

w 为固定干扰信号，$w\in M(RH^2)$，G_{22}包括 G 的所有不稳定极点，G_{22}严格真，G_{22}可镇定.

要求设计控制器 K 镇定 G 且极小化指标

$$J=\|LFT(G,K)w\|_2, \tag{1.5}$$

$LFT(G,K)$为 w 到 z 的传递函数矩阵.

$$LFT(G,K)=G_{11}+G_{12}K(I-G_{22}K)^{-1}G_{21}. \tag{1.6}$$

由文[1]可得镇定 G 的控制器的参数化公式为

$$K=(Y-MQ)(X-NQ)^{-1} \tag{1.7}$$
$$=(\widetilde{X}-Q\widetilde{N})^{-1}(\widetilde{Y}-Q\widetilde{M}), \tag{1.8}$$

其中 $Q\in(RH^\infty)^{m\times l}$ 为参数. $\widetilde{M}\in(RH^\infty)^{l\times l}$, $\widetilde{N}\in(RH^\infty)^{l\times m}$ 为 G_{22} 的左互质分解. $M\in(RH^\infty)^{m\times m}$, $N\in(RH^\infty)^{l\times m}$ 为 G_{22}的右互质分解.

$$G_{22}=\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}=NM^{-1}. \tag{1.9}$$

$\widetilde{X},\widetilde{Y},X,Y\in M(RH^\infty)$满足广义 Bezout 等式

$$\begin{bmatrix}\widetilde{X} & -\widetilde{Y}\\ -\widetilde{N} & \widetilde{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M & Y\\ N & X\end{bmatrix}=I. \tag{1.10}$$

当控制器 K 由(1.8)式给出时，有

$$J=\|T_1w-T_2QT_3w\|_2, \tag{1.11}$$

其中 $T_1=G_{11}+G_{12}M\widetilde{Y}G_{21}$, $T_2=G_{12}M$, $T_3=\widetilde{M}G_{21}$, $T_i\in M(RH^\infty)$, $i=1,2,3$.

利用文[3]中给出的方法求得使(1.11)中 J 达到最小的最优参数 Q^*，将 Q^*代入(1.7)，(1.8)得到最优控制器 K^*.

上述 H^2最优控制器在某些情况下是不唯一的，这个不唯一的最优控制器集合可以用参数化公式来表示，公式中的参数就是最优控制器的自由度. 这些自由度可以用来提高闭环系统的鲁棒性或求取稳定最优控制器. 由于不稳定的控制器具有调试困难和可靠性低的弱点，给工程应用造成较大困难. 另外控制系统的鲁棒性也是十分重要的性能指标. 因此提高闭环系统鲁棒性以及求取稳定控制器均具有较大的实际意义.

本文首先给出了最优控制器不唯一的条件及将多变量 H^2最优设计问题化为一组单变量 H^2最优设计问题的方法，进而给出了最优控制器集合的参数化公式. 并给出了利用最优控制器的自由参数，提高闭环系统鲁棒性及求取稳定最优控制器的方法.

2. 最优控制器集合

引理 2.1[2] 设 $A\in(RH^\infty)^{n\times m}$, $\mathrm{rank}(A)=l$. 则存在 $B\in U(RH^\infty)^{n\times n}$, $C\in U(RH^\infty)^{m\times m}$，使得

$$BAC = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

其中　$D\in(RH^\infty)^{l\times l}$, $\mathrm{rank}(D)=l$.

推论 2.2　设 $A\in(RH^\infty)^{n\times m}$, $\mathrm{rank}(A)=l$. 则存在 $B\in U(RH^\infty)^{n\times n}$, $B\in U(RH^\infty)^{n\times m}$,使得

$$BA = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

$$AC = [D_2 \quad 0], \tag{2.3}$$

其中　$D_1\in(RH^\infty)^{l\times m}$, $D_2\in(RH^\infty)^{n\times l}$, $\mathrm{rank}(D_1)=\mathrm{rank}(D_2)=l$.

假设　$\mathrm{rank}(G_{12})=l_1$,由于 M 为可逆方阵,则 $\mathrm{rank}(T_2)=l_1$. 由于 w 为列向量,因此 $\mathrm{rank}(T_3w)=1$. 由推论2.2知,存在 $F_1\in U(RH^\infty)^{m\times m}$, $F_2\in U(RH^\infty)^{l\times l}$,使得

$$T_2F_1 = [T_{21} \quad 0], \tag{2.4}$$

$$F_2T_3w = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

其中　$T_{21}\in(RH^\infty)^{p\times l_1}$, $\mathrm{rank}(T_{21})=l_1$, $w_1\in RH^\infty$为标量.

由于 $F_1\in U(RH^\infty)$, $F_2\in U(RH^\infty)$,因此当令 $M_1=MF_1$, $N_1=NF_1$, $\widetilde{M}_1=F_2\widetilde{M}$, $\widetilde{N}_1=F_2\widetilde{N}$ 时, M_1, N_1 右互质, $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{N}_1$左互质,且有

$$G_{22} = \widetilde{M}_1^{-1}\widetilde{N}_1 = N_1M_1^{-1}. \tag{2.6}$$

当选择(2.6)为 G_{22}的左、右互质分解时,则镇定控制器的参数化公式为

$$K = (Y_1 - M_1Q)(X_1 - N_1Q)^{-1} \tag{2.7}$$

$$= (\widetilde{X}_1 - Q\widetilde{N}_1)^{-1}(\widetilde{Y}_1 - Q\widetilde{M}_1), \tag{2.8}$$

其中　$X_1 = XF_2^{-1}$, $Y_1 = YF_2^{-1}$, $\widetilde{X}_1 = F_1^{-1}\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}_1 = F_1^{-1}\widetilde{Y}$.

当 Q 按照 T_{21}, w_1的相应维数分为

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

时,相应的有

$$Q_{11}\in(RH^\infty)^{l_1\times 1}, Q_{12}\in(RH^\infty)^{l_1\times(l-1)}, Q_{21}\in(RH^\infty)^{(m-l_1)\times 1}, Q_{22}\in(RH^\infty)^{(m-l_1)\times(l-1)}.$$

$$J = \|T_1w - T_21Q_{11}W_1\|_2. \tag{2.10}$$

显然指标 J 仅决定于参数 Q_{11},参数 Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}的选择不影响指标 J,因此在(2.9)关于 Q 的分解中,当 $l_1<m$, $l>1$时, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}不为零,则极小化 J 的最优控制器不唯一. 而 $l_1<m$ 意味着 G_{12}非列满秩, $l>1$表示测量输出 y 的个数大于1,因此有

定理 2.3　镇定 G 且极小化指标 J 的最优控制器不唯一的充分条件,为以下两式中任一个成立或同时成立

1) G_{12}非列满秩.

2) 测量输出 y 的个数大于1.

指标(2.10)中参数 Q_{11}为列向量,以下本文给出一种将(2.10)化成一组单变量 H^2问题的方法.

作 T_{21}的内外分解

$$T_{21} = T_iT_0, \tag{2.11}$$

T_i 为内矩阵($T_i^*\cdot T_i=I$), T_0为外矩阵(T_0在 $\mathrm{Re}(s)>0$无零点). $T_i\in(RH^\infty)^{p\times l_1}$, $P\geqslant l_1$. 设 $p>l_1$,则

可以求得 T_i 的补内矩阵因子 $T_{i\perp}$ 使得 $[T_i \quad T_{i\perp}]$ 为方的内矩阵，且 $T_{i\perp}^* T_i = 0$，$p = l_1$ 时，无须求 $T_{i\perp}$.

令 $B = T_0 Q_{11}$，则 $B = (b_1, \cdots, b_{l_1})'$， $b_i \in RH^\infty$.

(2.10)化为

$$J^2 = \|[T_i \quad T_{i\perp}^*](T_1 w - T_i B w_1)\|_2^2 \tag{2.12}$$

$$= \left\| \begin{matrix} T_i^* T_1 w - B w_1 \\ T_{i\perp}^* T_1 w \end{matrix} \right\|_2^2 \tag{2.13}$$

$$= \|T_i^* T_1 w - B w_1\|_2^2 + \|T_{i\perp}^* T_1 w\|_2^2. \tag{2.14}$$

令 $T_i^* T_1 w = (f_1, \cdots, f_{l_1})'$，

有

$$J^2 = \left\| \begin{matrix} (f_1 - b_1 w_1) \\ \vdots \\ (f_{l_1} - b_{l_1} w_1) \end{matrix} \right\|_2^2 + \|T_{i\perp}^* T_1 w\|_2^2 \tag{2.15}$$

$$= \sum_{i=1}^{l_1} \|f_i - b_i w_1\|_2^2 + \|T_{i\perp}^* T_1 w\|_2^2. \tag{2.16}$$

因此极小化指标 J 的问题化为一组单变量问题.

$$\min_{b_i \in RH^\infty} \|f_i - b_i w_1\|_2, \quad i = 1, \cdots, l_1. \tag{2.17}$$

解(2.17)得最优参数 b_i^*，B^*，再由 $B^* = T_0 Q_{11}^*$ 可得最优参数 Q_{11}^*. 当 Q_{11}^* 求得以后，则镇定 G 且极小化指标 J 的最优控制器由下式给出

$$K = (Y_1^* - M_1 R)(X_1^* - N_1 R)^{-1}$$
$$= (\widetilde{X}_1^* - R\widetilde{N}_1)^{-1}(\widetilde{Y}_1^* - R\widetilde{M}_1). \tag{2.18}$$

其中 $R = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$ 为自由参数，$R \in M(RH^\infty)$，

$$X_1^* = X_1 - N_1 \begin{bmatrix} Q_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y_1^* = Y_1 - M_1 \begin{bmatrix} Q_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{X}_1^* = \widetilde{X}_1 - \begin{bmatrix} Q_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \widetilde{N}_1, \qquad \widetilde{Y}_1^* = Y_1 - \begin{bmatrix} Q_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \widetilde{M}_1.$$

3. 利用剩余自由度提高鲁棒性

设图1所示对象 G 具有不确定性，其摄动为 ΔG. G_{22} 的摄动为 ΔG_{22}. 假设 $G_{22} + \Delta G_{22}$ 包括 $G + \Delta G$ 的所有不稳定极点，G_{22} 和 $G_{22} + \Delta G_{22}$ 具有相同数目的不稳定极点，且 ΔG_{22} 满足

$$\bar{\sigma}(\Delta G_{22}(j\omega)) < |W_3(j\omega)|, \quad \forall\ \omega. \tag{3.1}$$

$W_3(s)$ 为稳定最小相函数，$W_3(s) \in RH^\infty$.

引理 3.1[2] K 镇定 G 当且仅当 K 镇定 G_{22}.

引理 3.2[6] K 鲁棒镇定 $G_{22} + \Delta G_{22}$ 的充分条件为 K 镇定 G_{22}，且下述鲁棒性指标 $J_3 < 1$.

$$J_3 = \|W_3 K (I - G_{22} K)^{-1}\|_\infty. \tag{3.2}$$

定理 3.3 K 鲁棒镇定 $G + \Delta G$ 的充分条件为 K 镇定 G_{22}，且 $J_3 < 1$.

因此闭环系统鲁棒性指标 J_3反映了闭环系统的鲁棒稳定性能，减小指标 J_3就意味着鲁棒性能的提高.

当最优控制器集合由(2.18)给出时，J_3化为

$$J_3 = \|W_3M_1\widetilde{Y}_1^* - W_3M_1R\widetilde{M}_1\|_\infty. \tag{3.3}$$

由(3.3)可见，最优控制器集合中的自由参数 R 可以用来提高鲁棒性(减小指标 J_3)，通过求解模型匹配问题可以得到使(3.3)中 J_3达到最小的最优参数 R^*. 将 R^*代入(2.18)即可得到使闭环系统鲁棒性达到最好的最优控制器 K^*

$$K^* = (\widetilde{X}_1^* - R^*\widetilde{N}_1)^{-1}(\widetilde{Y}_1^* - R^*\widetilde{M}_1). \tag{3.4}$$

4. 利用剩余自由度求取稳定最优控制器

令 (2.18)式中 $R=0$得“最简”最优控制器

$$K^* = (\widetilde{X}_1^*)^{-1}\widetilde{Y}_1^*, \tag{4.1}$$

然而这个“最简”最优控制器可能是不稳定的，但是在一定条件下，适当地选择自由参数 Q_{12}，Q_{21}，Q_{22}后组成的控制器可以是稳定的. 为简便起见，令 $Q_{21}=0$，$Q_2=\begin{bmatrix}Q_{12}\\Q_{22}\end{bmatrix}$，将 $\widetilde{M}_1$，$\widetilde{N}_1$按 Q_2的维数作分解

$$\widetilde{M}_1 = \begin{bmatrix}\widetilde{M}_{11}\\\widetilde{M}_{12}\end{bmatrix}, \qquad \widetilde{N}_1 = \begin{bmatrix}\widetilde{N}_{11}\\\widetilde{N}_{12}\end{bmatrix},$$

则(2.18)化为

$$K^* = (\widetilde{X}_1^* - Q_2\widetilde{N}_{12})^{-1}(\widetilde{Y}_1^* - Q_2\widetilde{M}_{12}). \tag{4.2}$$

(4.2)所示控制器稳定的充分必要条件为

$$(\widetilde{X}_1^* - Q_2\widetilde{N}_{12}) \in U(RH^\infty)，\text{即 } \delta(|\widetilde{X}_1^* - Q_2\widetilde{N}_{12}|) = 0.$$

引理 4.1[3] 给定 $a,b\in RH^\infty$. 则存在 $r^*\in RH^\infty$，使得 $\delta(a+r^*b)=0$的充分必要条件为 a,b 互质且在 b 的实的正互异零点上，$a(\cdot)$的值具有相同符号.

引理 4.2[3] 设 $A,B\in M(RH^\infty)$，右互质，A 为方阵. 令 $a=|A|$，b 为 B 的最小不变因子. 则集$\{|A+RB|:R\in M(RH^\infty)\}$和集$\{a+rb:r\in RH^\infty\}$相同，且有

$$\min_{R\in M(RH^\infty)} \delta(|A+RB|) = \min_{r\in RH^\infty} \delta(a+rb). \tag{4.3}$$

定理 4.3 令 $a=|\widetilde{X}_1^*|$，b 为 $\widetilde{N}_{12}$的最小不变因子. 则存在 $Q_2\in M(RH^\infty)$使由(4.2)所示的控制器稳定的充分必要条件为 a,b 互质，且在 b 的实的正互异零点上，$a(\cdot)$的值具有相同符号.

由以上引理及分析知定理4.3成立. 以下给出当 a,b 满足定理4.3中条件时，求取稳定控制器的方法：

1) 由文[3]中所给出的插值方法求得参数 r^*，使得 $u=a+r^*b\in U(RH^\infty)$，$\delta(u)=0$，$r^*\in RH^\infty$.

2) 由文[3]中给出的构造方法，由 r^*构造 Q_2^*，使得 $\delta(|\widetilde{X}_1^*-Q_2^*\widetilde{N}_{12}|)=\delta(a+r^*b)=0$.

3) 将 Q_2^*代入(4.2)得稳定最优控制器

$$K^* = (\widetilde{X}_1^* - Q_2^*\widetilde{N}_{12})^{-1}(\widetilde{Y}_1^* - Q_2^*\widetilde{M}_{12}). \tag{4.4}$$

5. 实例计算

考虑图2所示线性控制系统. G 为对象, w 为固定干扰, ΔG 为对象摄动

$$G(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix}48s+25 & -4s+5\\ 3s & 41s+30\end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

$$w(s)=\left[\frac{1}{s+1},\frac{1}{s+1}\right]', \tag{5.2}$$

$$W_3(s)=\frac{s+1}{s+10}. \tag{5.3}$$

设计目的为求解镇定控制器 K 极小化由 w 引起的输出能量 $\|y\|_2$,并利用最优控制器的剩余自由度提高系统鲁棒性或求取稳定控制器.

由本文第 2 节所述方法得结果如下:

$$M_1(s)=\mathrm{diag}\left(\frac{s-1}{s+1},\frac{s-1}{s+1}\right),\quad N_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}48s+25 & -4s+5\\ 3s & 41s+30\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{M}_1(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s-1}{s+1} & 0\\ \dfrac{-s+1}{s+1} & \dfrac{s-1}{s+1}\end{bmatrix},\quad \widetilde{N}_1(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}48s+25 & -4s+5\\ -45s-25 & 45s+25\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{X}_1(s)=\mathrm{diag}\left[\frac{s^2+0.76s+0.041}{(s+2)(s+0.732)},\frac{s^2+1.033s+0.279}{(s+2)(s+0.521)}\right],$$

$$\widetilde{Y}_1(s)=\begin{bmatrix}-0.0823 & -0.008\dfrac{s-1.25}{s+0.732}\\ \dfrac{0.0053s}{s+0.521} & -0.0845\end{bmatrix},$$

$$\|y\|_2=\|(I-GK)^{-1}w\|_2=\|M_1(\widetilde{X}_1-Q\widetilde{N}_1)w\|_2,$$
$$=\|(\widetilde{X}_1-Q\widetilde{N}_1)w\|_2.$$

$$\widetilde{X}_1w=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+0.76s+0.041}{(s+1)(s+2)(s+0.732)}\\ \dfrac{s^2+1.033s+0.279}{(s+1)(s+2)(s+0.521)}\end{bmatrix},\quad \widetilde{N}_1w=\begin{bmatrix}w_1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{44s+30}{(s+1)^2(s+2)}\\ 0\end{bmatrix}.$$

$$Q=[Q_1\quad Q_2],\quad Q_1=\begin{bmatrix}Q_{11}\\ Q_{21}\end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix}Q_{12}\\ Q_{22}\end{bmatrix}.$$

则有

$$\|y\|_2^2=\|f_1-Q_{11}w_1\|_2^2+\|f_2-Q_{21}w_1\|_2^2. \tag{5.4}$$

解得最优参数 Q_{11}^*, Q_{21}^* 分别为

$$Q_{11}^*(s)=\frac{(s+1)(s^2+0.76s+0.041)}{(s+0.732)(44s+30)},\quad Q_{21}^*(s)=\frac{(s+1)(s^2+1.033s+0.279)}{(s+0.521)(44s+30)}.$$

$$\|y\|_2=0.$$

为保证控制器为真的,令 $Q_{11}^*(s)=\dfrac{20}{s+20}Q_{11}^*(s)$, $Q_{21}^*(s)=\dfrac{20}{s+20}Q_{21}^*(s)$. 则最优控制器集合为

$$K^*=(\widetilde{X}_1^*-Q_2\widetilde{N}_{12})^{-1}(\widetilde{Y}_1^*-Q_2\widetilde{M}_{12}), \tag{5.5}$$

其中

$$\widetilde{X}_1^*(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{(s^2+0.76s+0.041)(s^2-1.136s+2)}{(s+2)(s+20)(s+0.682)(s+0.732)} & \dfrac{1.818(s-1.25)(s^2+0.76s+0.041)}{(s+2)(s+20)(s+0.682)(s+0.732)}\\ \dfrac{-21.818(s^2+1.033s+0.279)}{(s+2)(s+20)(s+0.682)} & \dfrac{(s^2+1.033s+0.279)(s^2+22.5s+11.364)}{(s+2)(s+20)(s+0.682)(s+0.521)}\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{Y}_1^*(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{-0.537(s^3+3.081s^2+3.791s+1.527)}{(s+20)(s+0.682)(s+0.732)} & \dfrac{-0.008(s-1.25)}{(s+0.732)}\\ \dfrac{-0.449(s^3-0.21s^2-0.923s-0.282)}{(s+20)(s+0.521)(s+0.682)} & -0.0845\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{N}_{12}(s)=\left[\frac{-45s-25}{(s+1)(s+2)}\quad\frac{45s+25}{(s+1)(s+2)}\right],\widetilde{M}_{12}(s)=\left[\frac{-s+1}{s+1},\frac{s-1}{s+1}\right].$$

5.1 利用剩余自由度提高鲁棒性能

鲁棒性指标 J_3 化为

$$J_3=\|W_3M_1\widetilde{Y}_1^*-W_3M_1Q_2\widetilde{M}_{12}\|_\infty. \tag{5.6}$$

解(5.6)得最优指标 $J_3^*=0.5333$,最优参数 Q_2^* 为

$$Q_{12}^*(s)=\frac{-0.261(s+0.686)(s^2+4.03s+5.44)}{(s+1)(s+20)(s+0.708)},$$

$$Q_{22}^*(s)=\frac{-0.1861s-4.352)(s+0.715)(s+1.736)}{(s+1)(s+20)(s+0.708)}.$$

最优控制器为

$$K^*(s)=\frac{1}{d(s)}\begin{bmatrix}n_{11}(s) & n_{12}(s)\\ n_{21}(s) & n_{22}(s)\end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

$$d(s)=(s+0.584)(s+0.163)(s-0.041)(s-3.475),$$

$$n_{11}(s)=-0.798(s+0.836)(s-0.971)(s^2+3.47s+3.181),$$

$$n_{12}(s)=0.253(s+3.8)(s+0.408)(s^2+3.61s+7.665),$$

$$n_{21}(s)=-0.635(s+1.437)(s-0.961)(s^2+3.6s+4.364),$$

$$n_{22}(s)=0.102(s+13.03)(s+0.414)(s^2+3.35s+3.206).$$

5.2 利用剩余自由度求取稳定最优控制器

由(4.1)式给出的“最简”最优控制器不稳定.利用自由参数 Q_2 可以求得稳定最优控制器,其结果如下:

$$a=|\widetilde{X}_1^*|=\frac{(s^2+0.76s+0.041)(s^2+1.033s+0.279)(s^4+21.36s^3+27.47s^2+3.175s-2.063)}{(s+2)^2(s+20)^2(s+0.682)^2(s+0.732)(s+0.521)},$$

$$b=\frac{45s+25}{(s+1)(s+2)}.$$

由 $\delta(a+r^*b)=0$ 条件得

$$r^*=\frac{0.503(s+1)(s^2+0.76s+0.041)(s^2+1.033s+0.279)(s^3+23.7s^2+77.61s+70.78)}{(s+2)(s+20)^2(s+0.682)^2(s+0.732)(s+0.521)(s+0.556)}.$$

由 r^* 构造出 Q_2^* 为

$$Q_2^*=\begin{bmatrix}\dfrac{128.35(s+0.95)(s+0.524)(s^2+3.71s+3.544)(s+0.06)}{(s+2)(s+20)(s+0.448)(s^2+1.47s+0.563)}\\ \dfrac{127.85(s+0.543)(s+0.0597)(s^2+3.7s+3.541)(s^2+1.39s+0.533)}{(s+2)(s+20)(s+0.448)(s+0.0586)(s^2+1.47s+0.563)}\end{bmatrix}.$$

稳定最优控制器为

$$K^*(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} n_{11}(s) & n_{12}(s) \\ n_{21}(s) & n_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$d(s) = (s + 0.059)(s^2 + 1.444s + 0.579)(s^2 + 40.92s + 428.89),$$

$$n_{11}(s) = 127.82(s + 21.1)(s + 1.89)(s + 0.634)(s^2 + 1.333s + 0.646),$$

$$n_{12}(s) = -128.36(s + 21.1)(s + 1.631)(s + 1.122)(s + 0.489)(s + 0.216),$$

$$n_{21}(s) = 127.4(s + 21.1)(s + 1.887)(s + 0.639)(s^2 + 1.339s + 0.645),$$

$$n_{22}(s) = -127.93(s + 21.1)(s + 1.643)(s + 1.105)(s + 0.504)(s + 0.213).$$

6. 结　论

本文研究了 H^2 最优控制器的不唯一的问题.给出了一种将多变量 H^2 最优设计问题化为一组单变量 H^2 最优问题的方法,得出了最优控制器集合的参数化公式.研究结果表明,当测量输出 y 的个数大于 1 或 G_{12}非列满秩时,H^2 最优控制器不唯一.本文还给出了利用剩余自由参数求取稳定最优控制器或提高闭环系统鲁棒性能的方法.实例研究结果表明,这种方法可以充分利用控制器的自由度,求取的控制器不仅极小化由于干扰 w 引起的最大输出能量 $\|z\|_2$,而且闭环系统具有良好的鲁棒稳定性能,控制器也是稳定的.具有工程应用价值.

参 考 文 献

[1] Chu, C. C., J. C. Doyle, E. B. Lee, The General Distance Problem in H^∞ Optimal Control Theory, Int. J. Control, 44, 2, (1986), 565—598.

[2] Francis, B. A., A Course in H^∞ Control Theory, Springer—Verlag, (1987).

[3] Vidyasagar, M., Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press, Cambridge, MA, (1985).

[4] Francis, B. A., J. C. Doyle, Linear Control Theory with an H^∞ Optimality Criterion, SIAM J. Control and Optimization, 25, 4, (1987), 815—844.

[5] Glover, K., All Optimal Hankel—Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their L^∞—Error Bounds, Int. J. Control, 39, 6, (1984), 1115—1193.

[6] Vidyasagar, M., H. Kimura, Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems, Automatica, 22, (1987), 85—94.

On Non—uniqueness of H^2 Optimal Controller and Improvement of System Behaviour

Fan Yushun, Wu Chi

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing)

Wang Enping

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract: In this paper, the problem of non—uniqueness of optimal H^2 controller is studied. The optimal H^2 controller set is given. A method is given to reduce the MIMO H^2 minimization problem to a set of SISO H^2 minimization problems. The free parameter of the optimal H^2 controller is used to improve closed—loop robustness behaviour or to obtain a stable optimal controller. Example shows that the designed controller not only minimizes the H^2 index, but also improves the system behaviour. The proposed method is of practical significance.

Key words: H^2 optimal controller; non—uniqueness; robustness; stable controller