

“线性”离散事件动态系统的频域方法

杨自厚 张后启

(东北工学院自动化系, 沈阳)

摘要 本文应用极大代数研究离散事件动态系统的频域解算法, 导出了传递矩阵 $A(z)$ 的级数 $A^*(z)$, 给出了 $A^*(z)$ 的存在和收敛条件, 给出一种在频域计算特征值的新方法.

关键词: 离散事件动态系统; 极大代数; 频域解; 特征值

1. 引言

近年来, G. Cohen 等人利用极大代数为工具, 将离散事件动态系统 (DEDS) 看作一个确定性系统, 建立一种“线性”模型^[1], 仿照传统的线性动态系统, 研究 DEDS 的稳定性、可控性、可观性等问题.

本文利用极大代数研究 DEDS 的频域算法, 导出传递矩阵 $A(z)$ 的级数 $A^*(z)$, 给出 $A^*(z)$ 的存在和收敛条件, 给出一种在频域计算特征值的新方法.

2. 事件延迟系统的频域解

对于文献[2]所示皮特利网所表示的系统, 可给出 z 变换一般表达式

$$X(z) = A(z)X(z) \oplus B(z)U(z), \quad (2.1)$$

$$Y(z) = C(z)X(z), \quad (2.2)$$

式中 $A(z) = A_0 \oplus A_1 z^{-1} \oplus \dots \oplus A_I z^{-I}$; $B(z) = B_0 \oplus B_1 z^{-1} \oplus \dots \oplus B_J z^{-J}$; $C(z) = C_0 + C_1 z^{-1} \oplus \dots \oplus C_I z^{-I}$. 令

$$\begin{aligned} A^*(z) &\triangleq I \oplus A(z) + A^2(z) \oplus \dots \\ &\triangleq a_0 \oplus a_1 z^{-1} \oplus a_2 z^{-2} \oplus \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

如果 $A^*(z)$ 存在并收敛, 则可将式(2.1)或(2.2)写成

$$X(z) = A^*(z)B(z)u(z), \quad (2.4)$$

$$Y(z) = C(z)A^*(z)B(z)u(z), \quad (2.5)$$

求反变换, 即可求得 $x(k)$ 和 $y(k)$ 的序列.

为研究 $A^*(z)$ 的存在和收敛问题, 先讨论 $X(z)$ 和 $A(z)$ 的收敛性问题.

定义 2.1 对于离散事件级数 $X(z) = \sum_{k \geq 0} \oplus x(k) \cdot z^{-k}$, 如存在正整数 q , 使对任意 $r > q$, 有

$$\sum_{k \geq 0} \oplus x(k) z^{-k} = \sum_{k \geq 0} \oplus x(k) z^{-k}, \quad (2.6)$$

则称级数 $X(z)$ (在级大代数意义下) 是收敛的. 如果至少存在一个 k , 使 $x(k)z^{-k}$ 无限增大, 则称

$X(z)$ 是发散的.

引理 2.1 设 A 为 $n \times n$ 矩阵, $\lambda(A)$ 为 A 的特征值^[1]. 则对矩阵序列

$$\sum_{k \geq 0} \mu_k A^k = \mu_0 \oplus \mu_1 A \oplus \mu_2 A^2 \oplus \dots \quad (2.7)$$

存在一个实数 ρ , 使 $\lambda(A) < \rho$ 时, 式(2.7)收敛于有限值; $\lambda(A) > \rho$ 时, 式(2.7)发散; 且

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} [\mu(k)]^{1/k}. \quad (2.8)$$

证明可参考文献[3]. 对于边界情况 $\lambda(A) = \rho$, 则式(2.7)可能收敛, 也可能发散.

定理 2.1 对于级数 $X(z)$, 存在实数 ρ , 使 $z > \rho$ 时, $X(z)$ 收敛于有限值; $z < \rho$ 时, $X(z)$ 发散; 且

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} [x(k)]^{1/k}. \quad (2.9)$$

证 由引理 2.1, 易证.

定义 2.2 系统稳定运行时有

$$x(k+d) = \lambda^d x(k), \quad k \geq k_0, \quad (2.10)$$

称 $x(k)$ 为 d 阶周期的.

定理 2.2 如果级数 $X(z)$ 的系数序列为周期序列, 则对边界情况

$$z = \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k)^{1/k},$$

级数 $X(k)$ 一定收敛.

定义 2.3 对于矩阵级数 $A(z) = \sum_{k \geq 0} \oplus A(k)z^{-k}$, 如果存在正整数 q , 使对任意 $r > q$ 有

$$\sum_{k \geq 0} \oplus A(k)z^{-k} = \sum_{k \geq 0} \oplus A(k)z^{-k}, \quad (2.11)$$

则称 $A(z)$ 是收敛的, 如果至少存在一个 k , 使 $A(k)z^{-k}$ 中的任一分量无限增长, 则称 $A(z)$ 是发散的.

由于矩阵级数 $A(z) = \{A_{ij}(z)\}$ 中的每一个元素是一个级数 $\sum_{k \geq 0} \oplus A_{ij}(k)z^{-k}$, 这个级数的收敛性决定着 $A(z)$ 的收敛性. 设

$$\rho_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{ij}(k)z^{-k}, \quad (2.12)$$

$$\rho_A = \sum_{i,j} \oplus \rho_{ij}, \quad (2.13)$$

则由定理 2.1 知, $z > \rho_A$ 时, $A(z)$ 收敛.

引理 2.2 如果矩阵 A 的特征值 $\lambda(A) \leq e$, 则 A 的序列 $A^* = E \oplus A \oplus A^2 + \dots$ 收敛.

证 由引理 2.1 及图 $G(A)$ 的性质^[1], 容易证明.

定理 2.3 $A(z)$ 中的矩阵 A_0 的特征值 $\lambda(A_0) \leq e$, 则 $A^*(z)$ 可以表示成式(2.3)的形式.

定理 2.4 存在正实数 λ , 当 $z > \lambda$ 时, $A^*(z)$ 收敛.

证 因为 $A^*(z) = a_0 \oplus a_1 z^{-1} \oplus a_2 z^{-2} \oplus \dots$, 将其看成一个矩阵序列级数 $a(z)$, 即

$$a(z) = \sum_{k \geq 0} \oplus a_k z^{-k} = A^*(z).$$

由式(2.12)和(2.13)知

$$\rho_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}(k)^{1/k}, \quad (2.14)$$

$$\rho_A = \sum_{i,j} \oplus \rho_{ij}, \quad (2.15)$$

故当 $z > \lambda = \rho_A$ 时, $A^*(z)$ 收敛.

由上述, 当 $z > \lambda = \rho_A$, $A^*(z)$ 收敛, 由式(2.1)和(2.2), 可以得出收敛解(式 2.4 和 2.5).

对于文献[2]所示皮特利网, 如取 $f_1=1, f_2=2, f_3=3, g_1=4, g_2=5, h_2=0, h_3=1$, 则有

$$A^*(z) = \left\{ \begin{array}{ccc} (3z^{-1})^* & 2z^{-1}(3z^{-1})^* & \cdot \\ 1(3z^{-1})^* & (3z^{-1})^* & \cdot \\ 3(3z^{-1})^* & 2(3z^{-1})^* & (3z^{-1})^* \end{array} \right\}^{\text{注}} \quad (2.16)$$

故 $\rho_A=3, z \geq 3$ 时 $A^*(z)$ 收敛. 当 $A^*(z)$ 收敛时, 频域解为

$$X(z) = A^*(z)B(z)U(z) = \begin{bmatrix} 4(3z^{-1})^* & 7z^{-2}(3z^{-1})^* \\ 5(3z^{-1})^* & 5z^{-1}(3z^{-1})^* \\ 7(3z^{-1})^* & 7z^{-1}(3z^{-1})^* \end{bmatrix} U(z).$$

如 $U = \begin{bmatrix} (4z^{-1})^* \\ (4z^{-1})^* \end{bmatrix}$, 则得

$$X(z) = \begin{bmatrix} 4(4z^{-1})^* \\ 5(4z^{-1})^* \\ 7(4z^{-1})^* \end{bmatrix}.$$

由反变换得 $x(k) = (4 \cdot 4^k \quad 5 \cdot 4^k \quad 7 \cdot 4^k)^T = (4 \quad 5 \quad 7)^T 4^k$.

3. 由 $A^*(z)$ 计算系统特征值

由于当 $k > I$ 时 $A_k=0$, 由极大代数运算性质知, 经过一定节拍后, $A^*(z)$ 中的每个元素必呈周期性递增规律, 因此, 可将 $A^*(z)$ 写成

$$A^*(z) = A_1(z) \oplus A_2(z) \left[\begin{array}{ccc} (\omega_1 z^{-d_1})^* & & \\ & (\omega_2 z^{-d_2})^* & \\ & & (\omega_n z^{-d_n})^* \end{array} \right], \quad (3.1)$$

式中 $A_1(z), A_2(z)$ 均为 $n \times n$ 矩阵.

对确定性线性 DEDS, 系统稳态运行时经常呈现出周期性, 即各状态满足式(2.10), λ 即为系统的特征值. 由于 $z \geq \rho$ 时, $X(z)$ 收敛, 并且可以证明, $\rho = \lambda$, 故特征值是使级数收敛的最小 z 值. 对于矩阵级数, 也有同样的结论. 对于式(2.4), 要使 $X(z)$ 存在, 必须要求 $A^*(z)$ 收敛, 而系统的特征值是使 $X(z)$ 收敛的最小 z 值, 因此, 也是 $A^*(z)$ 收敛的最小 z 值.

这样, 可以根据式(3.1)确定特征值

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \oplus \lambda_i = \sum_{i=1}^n \oplus \omega_i^{1/d_i}. \quad (3.2)$$

这里 ω_i 为回路 i 的权, d_i 为回路 i 的延迟数.

利用式(3.1)确定 ω_i, d_i 的原则如下:

(1) 图 $G(A(z))$ 为强连接[4].

1) 关键回路唯一. 式(3.1)中的 ω_i, d_i 均相同.

2) 关键回路不唯一, 但所有关键回路相互有公共节点. ω 和 d 分别为各关键回路的 ω_i 和

d_i 的最大公约数.

3) 关键回路不唯一,但所有关键回路分成 K 个“群”,群与群相互分离,每群有上述 1) 或 2) 的特点. ω 和 d 分别为各群的 ω_i 和 d_i 的最小公倍数.

(2) 图 $G(A(z))$ 为非强连接. 可以将 $G(A(z))$ 分成 K 个“群”,每个群都是强连接的,且各群的 ω 及 d 由上述 (1) 的方法确定. 则 $G(A(z))$ 中的顶点在第 i 个群所对应的元素序列为 $(\omega_i z^{-d_i})^*$, 其中 ω_i, d_i 分别为第 i 个群的权和延迟数.

$$\text{例 1 } A(z) = \begin{bmatrix} \cdot & 2z^{-1} & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3z^{-2} \end{bmatrix}.$$

$G(A(z))$ 如图 1 所示.

$$A^*(z) = \begin{bmatrix} 0 & 2z^{-1} & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3z^{-1})^* & & \\ & (3z^{-1})^* & \\ & & (3z^{-2})^* \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

由图 1 看出, $G(A(z))$ 分成两个群, 第一个由顶点 1、2 组成, 因此 $A^*(z)$ 中的第一、第二列元素均含 $(3z^{-1})^*$ 序列; 第二个群由顶点 3 组成, 因此, $A^*(z)$ 中第三列元素含 $(3z^{-2})^*$ 序列.

值得特别指出的是, 当 $d > 1$ 并且 d 的大小是由 d 条含延迟的弧形成时, 对应的元素序列表示为

$$(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_d z^{-d_i})^*. \quad (3.4)$$

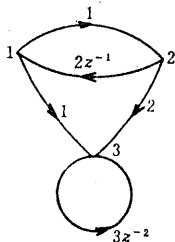


图 1 例 1 $A(z)$ 的 $G(A(z))$ 图

式 (3.4) 的意义由下例看出.

例 2 对图 2 所示系统, 可以写出

$$x(k) = Ax(k) \oplus Bu(k) = Ax(k) \oplus BFCx(k-1).$$

取 z 变换得

$$X(z) = (A \oplus BFCz^{-1})X(z) = A(z)X(z).$$

将图中所示参数代入, 得

$$A(z) = \begin{bmatrix} \cdot & 6z^{-1} & 6z^{-1} & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot & 4z^{-1} \\ 3 & \cdot & \cdot & 4z^{-1} \\ \cdot & 6 & 2 & \cdot \end{bmatrix}.$$

$G(A(z))$ 为强连接, 关键回路只有一条, 如图中双线所示, 其权为 $\omega=19, d=2$, 包含两条延迟的

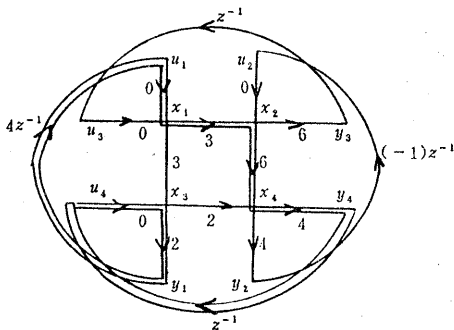


图 2 例 2 的加工系统

弧. 由 $A(z)$ 可以算出

$$A^*(z) = \begin{bmatrix} \cdot & 6z^{-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3z^{-1} \\ 3 & \cdot & 9z^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 16z^{-2} & 6z^{-1} & 10z^{-2} \\ 3 & 0 & 9z^{-1} & 13z^{-2} \\ 13z^{-1} & 10z^{-1} & 19z^{-2} & 4z^{-1} \\ 9 & 6 & 15z^{-1} & 0 \end{bmatrix} (9 \cdot 10z^{-2})^*.$$

故 $A^*(z)$ 的元素序列含有 $(9 \cdot 10z^{-2})^*$, 而不是 $(19z^{-2})^*$, 故 $\lambda = (9 \cdot 10)^{1/2} = 9.5$.

参 考 文 献

- [1] Cohen G., Dubois D., Quadrat J. P., Viot M., Linear System—Theoretic View of Discrete Event Processes and its Use for Performance Evaluation in Manufacture, IEEE Trans. AC-30, 3, (1985), 210—220.
- [2] Cohen G., Moller P., Quadrat J. P., Viot M., Linear System Theory for Discrete Event System, Proc. 23rd CDC, Las Vegas NV, (1984), 539—544.
- [3] Cuninghame—Green R. A., Huismen F., Convergence Problem in Minimax Algebra, J. Mathematical Analysis and Application, 88, (1982), 162—203.
- [4] Cohen G., Dubois D., Quadrat J. P., Viot M., A Linear System Theoretic View of Discrete Event Process, Proc. 22nd CDC, San Antonio Texas, (1983), 1939—1044.

Frequency Domain Method for “Linear” Discrete Event Dynamical System

Yang Zihou, Zhang Houqi

(Department of Automation, Northeast University of Technology, Shenyang)

Abstract: This paper studies the frequency domain solution of the DEDS by use of max—algebra. The series $A^*(z)$ of transfer matrix $A(z)$, the existence and convergence condition of $A^*(z)$ are given. A new approach for calculating the eigenvalue of system in frequency domain is proposed.

Key words: discrete event dynamic system; max—algebra; frequency domain solution; eigenvalue