增广控制的延时补偿法

洪　毅　童调生
(湖南大学电气工程系,长沙)

摘要　本文提出适合于综合多延时系统的增广控制的方法,给出其能稳、能检测及最优控制存在的条件.与增广状态方法相比,增广控制方法的优点在于延时补偿的通道少、能用于连续系统的延时补偿、不提高状态及相应的Riccati方程的维数,即计算工作量少.

关键词:最优控制;延时补偿;增广控制法

1. 引　言

一般线性时不变离散延时系统可记作

$$\left.\begin{aligned}&x(k+1)=Gx(k)+\sum_{i=0}^{n}H_iu(k-m_i),\\&0=m_0<m_1<m_2<\cdots<m_n=m,\\&x(0),u(-1),u(-2),\cdots,u(-m_n)\text{ 给定},\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中状态向量 $x(k)\in R^n$,控制向量 $u(k)\in R^r$,系数矩阵 $G\in R^{n\times n}$, $H_i\in R^{n\times r}$, m_i 表示延时拍数, $i=0,1,\cdots,n$.

对于增广状态系统,应定义增广状态向量

$$\bar{x}(k)=[x^\tau(k),u^\tau(k-n),u^\tau(k-n+1),\cdots,u^\tau(k-1)]^\tau.$$

在综合系统的最优控制时,以 $\bar{x}(k)$ 为反馈存在着如下缺点[2]:

1)状态反馈的延时补偿通道数为 rn,并且在(1)中即使某些 $H_j=0$ $(0<j<n)$,对于这些在状态方程中不出现的延时项,在延时补偿中仍然出现,使控制器的结构和算法复杂化;

2)增广状态和相应的Riccati方程的维数随延时量的增多而急剧增加,计算量大,故这种方法不适用于延时拍数大和多延时系统;

3)不能用于连续系统.

本文提出增广控制的方法不存在上述问题.

2. 延时控制的增广控制方法

对于(1)定义增广控制

$$\begin{aligned}&\bar{u}(k)=[u^\tau(k-m_0),u^\tau(k-m_1),\cdots,u^\tau(k-m_n)]^\tau,\\&\bar{H}=[H_0H_1\cdots H_n],\end{aligned}\tag{2}$$

则(2)可记作

本文于1988年5月4日收到. 1990年4月25日收到修改稿.

$$x(k+1)=Gx(k)+\overline{H}\overline{u}(k). \tag{3}$$

作为性能指标

$$J=\sum_{i=0}^{\infty}\{x^{\tau}(k)Qx(k)+\overline{u}^{\tau}(k)\overline{R}\overline{u}(k), \tag{4}$$

其中 Q 为 $n\times n$ 实对称非负定阵，且取 $Q=\Gamma^{\tau}\Gamma$

$$\overline{R}=\begin{bmatrix}R_0 & & & 0\\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_n\end{bmatrix}$$

是 $r(n+1)\times r(n+1)$ 维实对称正定阵.

定理 1 $[G,\overline{H}]$能稳定的充分必要条件是在$[G,\overline{H}_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中至少有一个阵对能稳定.

证 不妨设$[G,H_j]$ $0\leqslant j\leqslant n$ 能稳定，则根据 PBH 秩检验知[1]，必有

$$\operatorname{rank}[G-\lambda I_n\,\vdots\,H_j]=n \quad \forall\ \lambda\geqslant 1. \tag{5}$$

把 $\overline{H}$ 代入

$$[G-\lambda I_n\,\vdots\,\overline{H}],$$

且考虑到(2)(5)，则 $\forall\ \lambda\geqslant 1$，有

$$\operatorname{rnak}[G-\lambda I_n\,\vdots\,\overline{H}]=\operatorname{rank}[G-\lambda I_n\,\vdots\,H_0H_1\cdots H_n]=n,$$

故$[G,\overline{H}]$能稳定，反之亦然.

定理2 设在$[G,H_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中有任意的阵对能稳定，$[\Gamma,G]$能检测，$\operatorname{rank}H_0=r$，则增广控制系统(3)在性能指标(4)下的最优控制存在且唯一由(6)给出

$$\left.\begin{aligned}&u(k)=-[H_0^{\tau}H_0]^{-1}H_0^{\tau}\overline{H}Kx(k)-[H_0^{\tau}H_0]^{-1}H_0^{\tau}\sum_{i=1}^{n}H_iu(k-m_i),\\ &K=(R+\overline{H}^{\tau}\overline{P}\overline{H})^{-1}\overline{H}^{\tau}\overline{P}G,\\ &\overline{P}=Q+G^{\tau}\overline{P}G-G^{\tau}\overline{P}\overline{H}(\overline{R}+\overline{H}^{\tau}\overline{P}\overline{H})^{-1}\overline{H}^{\tau}\overline{P}G,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

且闭环系统趋于稳定.

证 (2)(3)(4)之最优控制

$$u=Kx(k).$$

K 以及其中的 P 均由(6)给出，则由(3)得

$$x(k+1)=Gx(k)+\overline{H}Kx(k).$$

与(1)相比较，且考虑到(1)中的 $m_0=0$，则可得

$$H_0u(k)=\overline{H}Kx(k)-\sum_{i=1}^{n}H_iu(k-m_i).$$

等号两端左乘$[H_0^{\tau}H_0]^{-1}H_0^{\tau}$即可证得(3)(4)之最优控制为(6)，再由定理1可知定理2成立.

对于控制延时的连续系统，无法运用增广状态空间方法，然而却能够运用增广控制方法进行延时补偿. 设

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=0}^{n}B_iu(t-\tau_i),\\ &x(0),u(\tau_n,0)\ \text{给定},0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

定义

$$\overline{u}(t)=[u^{\tau}(t-\tau_0),u^{\tau}(t-\tau_1),\cdots,u^{\tau}(t-\tau_n)]^{\tau},$$

$$\bar{B} = [B_0 \quad B_1 \cdots B_n],$$

则有

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \bar{B}\bar{u}(t). \tag{8}$$

作性能指标

$$J = \int_0^\infty (x^\tau Qx + \bar{u}^\tau \bar{R}\bar{u})\mathrm{d}t, \tag{9}$$

其中 Q 为 $n\times n$ 实对称非负定阵，且取 $Q=\Gamma^\tau\Gamma$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_0 & & & 0 \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_n \end{bmatrix}$$

是 $r(n+1)\times r(n+1)$ 维实对称正定阵.

定理 3 $[A,\bar{B}]$能稳定的充分必要条件为在$[A,B_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中至少有一阵对能稳定.

证明略.

定理 4 设在$[A,B_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中有任意的阵对能稳定，$[\Gamma,G]$能检测，$\mathrm{rank}B_0=r$，则增广控制系统(8)在性能指标(9)下的最优控制存在且唯一由(10)给出

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= -[B_0^\tau B_0]^{-1}B_0^\tau[\bar{B}Kx(t) \\ &\quad - [B_0^\tau B_0]^{-1}B_0^\tau\sum_{i=1}^n B_i u(t-\tau_i)], \\ K &= \bar{R}^{-1}\bar{B}^\tau P - A^\tau P - PA + P\bar{B}\,\bar{R}^{-1}B^\tau P - Q = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

证明类似定理2.

对于定理2有如下推论：

推论 1 设在$[G,H_i]$ $i=1,2,\cdots,n$ 中有任意的阵对能稳定，$[\Gamma,G]$能检测，$H_0=0$且 $\mathrm{rank}H_1=r$ 则(3)(4)的最优控制为

$$u(k) = -[H_1^\tau H_1]^{-1}H_1^\tau[\bar{H}Kx(k+m_1) + \sum_{i=2}^n H_i u(k-m_i+m_1)]. \tag{11}$$

推论 2 若 $H_0=0,n=1$，且记 $m_1=m$，则(3)(4)之最优控制为

$$u(k) = Kx(k+m).$$

具有延时补偿的控制即超前状态的闭环控制.

对于定理4也有类似的推论.

推论 3 设在$[A,B_i]$ $i=1,2,\cdots,n$ 中有任意的阵对能稳定，$[\Gamma,A]$能检测，则(8)(9)之最优控制为

$$u(t) = -[B_1^\tau B_1]^{-1}B_1^\tau[\bar{B}Kx(t+\tau_1) - \sum_{i=1}^n B_i u(t-\tau_i)],$$

$$K = \bar{R}^{-1}\bar{B}^\tau P - A^\tau P - PA + P\bar{B}\,\bar{R}^{-1}\bar{B}^\tau P - Q.$$

推论 4 若 $B_0=0,n=1$，且记 $\tau_1=\tau$，则(3)(4)之最优控制为

$$u(t) = Kx(t+\tau),$$

是超前状态的闭环控制.

与定理1、3相应的有关于增广控制的能控性与能观性的定理，对于离散的增广控制系统有

定理 5 $[G,\overline{H}]$完全能控的充分必要条件为

1)在$[G,H_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中至少有一阵对是完全能控的;或

2)在$[G,-\lambda I_n \mid H_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中至少有一阵对,对于任意的 λ 为满秩阵.

对于连续的增广控制的系统,有

定理 6 $[A,\overline{B}]$完全能控的充分必要条件是

1)在$[A,B_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中至少有一阵对是完全能控的;或

2)在$[A,-\lambda I_n \mid B_i]$ $i=0,1,\cdots,n$ 中至少有一阵对,对于任意的 λ 为满秩阵.

3. 增广控制与增广状态的对偶性

考虑在控制中有 L 步延时的系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k-L), \tag{12}$$

$$x(0),u(-1),u(-2),\cdots,u(-L)\ \text{给定}, x\in R^n, u\in R^r,$$

性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\{x^\tau(k)Qx(k)+u^\tau(k)Ru(k)\}, \tag{13}$$

其中 Q 是半正定阵,R 是正定阵,并且都是对称阵.

运用增广状态空间法设计延时系统最优调节器:设延时 $L=m$,定义增广状态向量

$$\bar{x}(k)=[x^\tau(k),u^\tau(k-m),\cdots,u^\tau(k-1)]^\tau,$$

于是由(12)可写出

$$\bar{x}(k+1)=\overline{A}\bar{x}(k)+\overline{B}u(k), \tag{14}$$

其中

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & I \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

定义增广性能指标

$$\bar{J}=\sum_{k=0}^{\infty}\{\bar{x}^\tau(k)\overline{Q}\bar{x}(k)+u^\tau(k)Ru(k)\}, \tag{15}$$

其中

$$\overline{Q}=\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

增广系统的最优控制问题(14)(15)之解

$$\left.\begin{aligned} u(k) &= -\overline{K}\bar{x}(k), \\ \overline{K} &= (R+\overline{B}^\tau\overline{P}\,\overline{B})^{-1}\overline{B}^\tau\overline{P}\,\overline{A}, \\ \overline{P} &= \overline{Q}+\overline{A}^\tau\overline{P}\,\overline{A}-\overline{A}^\tau\overline{P}\,\overline{B}(R+\overline{B}^\tau\overline{P}\,\overline{B})^{-1}\overline{B}^\tau\overline{P}\,\overline{A}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

定理 7 由 L 拍控制的延时系统(12)和性能指标(13)的增广系统(14)增广性能指标(15)所得到的增广状态的最优闭环控制(17)与 L 拍超前状态的闭环控制相同,即

$$-\overline{K}\overline{x}(k)=-Kx(k+L),\tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}K&=(R+B^{\tau}PB)^{-1}B^{\tau}PA,\\P&=Q+A^{\tau}PA-A^{\tau}PB(R+B^{\tau}PB)^{-1}B^{\tau}PA.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

证 当 $L=1$时,(12)为

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k-1).\tag{20}$$

相应的增广系统中的

$$\overline{x}(k)=\begin{bmatrix}x(k)\\u(k-1)\end{bmatrix},\quad \overline{A}=\begin{bmatrix}A&B\\0&0\end{bmatrix},\quad \overline{B}=\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix},\quad \overline{Q}=\begin{bmatrix}Q&0\\0&0\end{bmatrix}.\tag{21}$$

因 QR 已设为对称阵,故 Riccati 方程之解 $\overline{P}$ 也是对称阵,可记为

$$\overline{P}=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}^{\tau}&P_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $P_{11}P_{12}P_{22}$是 $r\times r$ 阶矩阵,且 $P_{11}P_{22}$是对称阵. 把(21)(22)代入(17)中的 Riccati 方程后,有

$$\left.\begin{aligned}P_{11}&=A^{\tau}PA+Q,\\P_{12}&=A^{\tau}PB,\\P_{22}&=B^{\tau}PB,\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

其中

$$P=\{P_{11}-P_{12}(R+P_{22})^{-1}P_{12}^{T}\}.\tag{24}$$

(23)代入(24)后,有

$$P=Q+A^{T}PA-A^{T}PB(R+B^{T}PB)^{-1}B^{T}PA.\tag{25}$$

显然这就是(19)中的 Riccati 方程. 把 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{P}$ 的表达式(21)(22)代入增广系统的反馈增益阵 $\overline{K}$ 的表达式(17),且考虑到(23)(24)可导出

$$\begin{aligned}\overline{K}&=(R+\overline{B}^{T}\overline{P}\ \overline{B})^{-1}\overline{B}^{T}\overline{P}\ \overline{A}\\&=K[A\vdots B]\end{aligned}\tag{26}$$

又由(20)知

$$-\overline{K}\overline{x}(k)=-K[A\vdots B]\begin{bmatrix}x(k)\\u(k-1)\end{bmatrix}=-Kx(k+1).\tag{27}$$

由此证得,当 $L=1$时定理成立.

当 $L=m>1$时,增广状态

$$\overline{x}(k)=[x^{\tau}(k),u^{\tau}(k-m),\cdots,u^{\tau}(k-1)]^{T}.\tag{28}$$

相应的 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{Q}\ \overline{K}$ 与(14)(15)(16)中相应的矩阵相同. 假设定理的结论成立,则应有

$$\begin{aligned}-\overline{K}\overline{x}(k)&=-Kx(k+m)\\&=-K[A^{m}\vdots A^{m-1}B\vdots\cdots\vdots AB\vdots B]\begin{bmatrix}x(k)\\u(k-m)\\\vdots\\u(k-1)\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{29}$$

由(27)(29)知

$$\overline{K}=K[A^{m}\vdots A^{m-1}B\vdots\cdots\vdots AB\vdots B].\tag{30}$$

对于控制延时 $L=m+1$的系统

对于控制延时 $L=m+1$的系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k-m-1), \tag{31}$$

增广为

$$\tilde{x}(k+1)=\tilde{A}\tilde{x}(k)+\tilde{B}u(k-1), \tag{32}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{x}(k)=[\tilde{x}^\tau(k),u^\tau(k-m-1),u^\tau(k-m),\cdots,u^\tau(k-2)]^\tau,\\&\tilde{A}=\bar{A},\tilde{B}=\bar{B}.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

系统(32)的控制有一拍延时,与(20)相对照,并再次运用增广状态:

$$\bar{\tilde{x}}(k)=[\tilde{x}^\tau(k),u^\tau(k-1)]^\tau. \tag{34}$$

相应地有闭环控制

$$u(k)=-\bar{\tilde{K}}\bar{\tilde{x}}(k).$$

考虑到(27),应有

$$-\bar{\tilde{K}}\bar{\tilde{x}}(k)=-\tilde{K}[\tilde{A}\quad\tilde{B}]\begin{bmatrix}\tilde{x}(k)\\u(k)\end{bmatrix}, \tag{35}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{K}=(R+\tilde{B}^\tau\tilde{P}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^\tau\tilde{P}\tilde{A},\\&\tilde{P}=\tilde{Q}+\tilde{A}^\tau\tilde{P}\tilde{A}-\tilde{A}^\tau\tilde{P}\tilde{B}(R+\tilde{B}^\tau\tilde{P}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^\tau\tilde{P}\tilde{A}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

注意到(34)之 $\tilde{A}=\bar{A},\tilde{B}=\bar{B}$,且取 $\tilde{Q}=\bar{Q}$,所以

$$\tilde{K}=\bar{K}. \tag{37}$$

(32)又可记作

$$\tilde{x}(k+1)=[\tilde{A}\ \tilde{B}]\begin{bmatrix}\tilde{x}(k)\\u(k-1)\end{bmatrix}. \tag{38}$$

(37)(38)代入(35)式有

$$-\bar{\tilde{K}}\bar{\tilde{x}}(k)=-\bar{K}\tilde{x}(k+1). \tag{39}$$

(30)代入(39),考虑到(33)式,有

$$\begin{aligned}-\bar{\tilde{K}}\bar{\tilde{x}}(k)&=-K[A^m\mid A^{m-1}B\mid\cdots\mid AB\mid B]\begin{bmatrix}x(k+1)\\u(k-m)\\\vdots\\u(k-1)\end{bmatrix}\\&=-Kx(k+m+1).\end{aligned} \tag{40}$$

等式左端是 $m+1$ 拍延时控制系统的增广系统的最优控制,右端是 $m+1$ 拍超前状态的闭环控制,由此定理得证.

参 考 文 献

[1] Kailath,T. ,Linear Systems,Englewood Cliffs Prentice Hall,New York,(1980),135—139,243—244.

[2] 童调生,增广控制的扰动和延时补偿,科学通报,9,(1988),717—718.

[3] 童调生,离散多延时系统的增广系统,科学通报,6,(1988),477—478.

[4] 童调生,电气工程最优控制,机械工业出版社,北京,(1989),21—66,236—240.

An Augmented Control for Delay Compensation

Hong Yi, Tong Tiaosheng

(Department of Electrical Engineering, Hunan University, Changsha)

Abstract: This paper presents an augmented control method suitable for syntheses of multi—delay systems. And its stability, detectability and existance conditions of optimal control are given. In comparison with the augmented state method the augmented control method has the following advantages the small number of delay compensation passages, suitability for continuous systems and non—increasing dimensions of state vector and corresponding Riccati equations, namely, the small computation quantity.

Key words: optimal control; compensating delav; augmented control method

---

(continued from page 55)

IFAC Symposium Distributed Intelligent Systems DIS'91	Aug. 13—15	Washington DC USA	Sept. 22 1990	Prof. A. H. Levis LIDS 35—410, M. I. T Cambridge, MA 02139, USA
EFMI/IIASA/IFAC Intl. Conference Medical information Systems and Expert Systems	Aug. 19—22	Vienna Austria	*	K. P. Adlassnig, MIE'91 Secr. General c/o Inst. f. Medizin. Computerwissenschaften Garnisong. 13, 8. Hof A—1090 Vienna, Austria
IFAC Symposium Design Methods of Control Systems	Sept. 4—6	Zurich Swizerland	*	Prof. F. Kraus, ETH Zentrum ETL, CH—8092 Zurich Switzerland
IFAC Symposium Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFEPROCESS'91	Sept. 10—13	Baden—Baden FRG	June 15 1990	VDI/VDE GMA Sateprocess 91 POB 1139, Graf Recke Str. 84 D—4000 Düsseldorf 1, FRG
IFAC/(IFIP)/IMACS Symposium Robot Control SYROCO'91	Sept. 16—18	Vienna Austria	Oct. 15 1990	ÖPWZ Rockgasse 6 A—1014 Vienna, Austria
IFAC Workshop(3rd) Artificial Intelligence in Real Time Control	Sept. 23—25	Napa, CA USA	*	Prof. G. J. Suski, Lawrence Livermore Nat. Lab., 7000 East Ave, Livermore, CA—94550, USA
IFAC/ISHS Workshop Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture	Sept. 30 Oct. 3	Matsuyama Japan	Oct. 15 1990	Prof. H. Nonami, Dept. of Biomechanical Systems, Ehime University, Tarumi Matsuyama 790, Japan
IFAC/(ISHS) Workshop Algorithms and Architectures for Real—Time Control	Sept.	Bangor UK	*	Prof. D. I. Jones, School of Electronic Engg. Science, UCNW Dean Street, Bangor Gwynedd LL57 1UT, UK

(continued on page 79)