第7卷 第4期
1990年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 7, No. 4
Dec., 1990

关于双线性系统状态观测器及其反馈控制的稳定性

廖冬初　陈　珽
(华中理工大学自控系，武汉)

摘要　本文首先讨论了一类有界输入双线性系统状态观测器的渐近稳定性，然后给出了采用稳定的状态反馈法则，利用观测器状态进行反馈控制时，闭环系统是渐近稳定的一个充分条件.

关键词：双线性系统；状态观测器；反馈控制；渐近稳定性

考虑如下的双线性系统：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)N_ix(t)+Bu(t), \tag{1}$$

$$y(t)=Cx(t), \tag{2}$$

其中　$x(t)\in R^n, y(t)\in R^p, u(t)=[u_1(t)\cdots u_m(t)]^T\in R^m$，$x(t)$，$y(t)$，$u(t)$分别表示系统的状态、输出和输入. 这里上标 T 表示转置. t 表示时间变量，设初始时间为 0，即设 $t\in[0,\infty]$，初始状态为 $x(0)$. 假设已知 A、B、C、N_i，$i=1,\cdots,m$ 分别为相应维数的常数矩阵.

在文[1]中，讨论了由(1)、(2)所组成系统的如下形式的状态观测器：

$$\dot{z}(t)=[A+\sum_{i=1}^{m}u_i(t)N_i]z(t)+Bu(t)+G(t)[y(t)-Cz(t)], \tag{3}$$

其中　$z(t)\in R^n, G(t)=G(t,u(t))\in R^{n\times p}$. 文[2]在 $u(t)$一致有界的条件下，给出了 G 为常数阵时 $z(t)$渐近收敛于 $x(t)$的充分条件. 本文将首先证明这个条件可以进一步放松，然后在一定假设下，证明采用稳定的状态反馈法则，利用观测器状态进行反馈控制时，闭环系统仍将是渐近稳定的.

首先证明：

定理 1　考虑系统(1)、(2)及形如(3)的状态观测器. 设 $u(t)$是一致的有界的，即存在常数组 $U_{i\min}, u_{i\max}$，使得对任何 $t\in[0,\infty)$，有下式

$$u_{i\min}\leqslant u_i(t)\leqslant u_{i\max},\quad i=1,\cdots,m \tag{4}$$

成立，若存在一组常数 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，使得$(A+\sum_{i=1}^{m}\beta_iN_i, C)$为可观测对，那么一定存在常数矩阵 G，使得对任何输入 $u(t)$，$u(t)$满足(4)式，$z(t)-x(t)$一致收敛于零.

证　由假设，存在一组常数 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，使$(A+\sum_{i=1}^{m}\beta_iN_i, C)$为可观测对. 对于任何这样一组常数 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，记 $\bar{u}_i(t)=u_i(t)-\beta_i$，$i=1,\cdots,m$. 由于(4)式成立，因此 $\|\sum_{i=1}^{m}\bar{u}_i(t)N_i\|_2$ 在 $t\in[0,\infty)$上是一致有界的，记

本文于1988年11月24日收到. 1990年2月8日收到修改稿.

$$k = \sup_{t\geqslant 0} \| \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i(t) N_i \|_2. \tag{5}$$

这里$\|\cdot\|$表示与对应的向量范数相容的矩阵的谱范数. 向量的范数以下记为$\|\cdot\|$.

由于$(A+\sum_{i=1}^{m}\beta_i N_i, C)$为可观测对，因此存在常数矩阵$G$，使得$\bar{A}=A+GC+\sum_{i=1}^{m}\beta_i N_i$具有任何指定的特征值. 不妨选择$G$，使$\bar{A}$的特征值为互不相同的实数，且使

$$k + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j(\bar{A}) < 0 \tag{6}$$

成立. 这里$\lambda_j(\bar{A})$表示$\bar{A}$的第j个特征值，$1\leqslant j\leqslant n$.

记
$$e(t) = z(t) - x(t),$$
易知
$$\dot{e}(t) = [A + GC + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i] e(t). \tag{7}$$

初始状态$e(0)=z(0)-x(0)$.

将$\bar{u}_i(t)$、$\bar{A}$的表示式代入(7)式，得到

$$\dot{e}(t) = [\bar{A} + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i(t) N_i] e(t). \tag{8}$$

由(8)式得到

$$e(t) = \exp\{\bar{A}t\} e(0) + \int_0^t \exp\{\bar{A}(t-\tau)\}(\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i(\tau) N_i) e(\tau) d\tau. \tag{9}$$

式中 $\exp\{\cdot\}$表示指数函数. 注意到

$$\| \exp\{\bar{A}t\} \|_2 = \exp\{t \max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j(\bar{A})\}$$

成立，因此由(9)得到

$$\begin{aligned} \| e(t) \|_2 \leqslant & \exp\{t \max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j(\bar{A})\} [\| e(0) \|_2 \\ & + \int_0^t \exp\{-\tau \max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j(\bar{A})]\} k \| e(\tau) \|_2] d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

从而有

$$\| e(t) \|_2 \leqslant \| e(0) \|_2 \exp\{t[k + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j(\bar{A})]\}. \tag{11}$$

再由式(6)可知，$e(t)$一致收敛于零，这就证明了定理.

在线性系统设计中，人们常常分别设计系统的状态反馈控制律和状态观测器，然后直接利用观测器状态实施反馈，仍能保证闭环系统是渐近稳定的. 对于非线性系统，文[3]证明了当状态反馈法则具有有限增量增益时，闭环系统也将是稳定的. 然而在双线性系统中，人们常常采用二次反馈法则，这时的状态反馈法则不再保证只有有限增量增益的条件，因此需要重新考察由分别设计状态反馈控制律和状态观测器所组成的闭环系统的稳定性. 下面就给出一个判定这种闭环系统渐近稳定性的充分条件.

定理 2 考虑由(1)及状态反馈$u_i(t)=f_i(x(t))$，$i=1,\cdots,m$所组成的闭环系统：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) N_i x(t) + BF(x), \tag{12}$$

其中
$$F(x) = [f_1(x) \cdots f_m(x)]^T.$$

假设成立：

1) 对所有$t\in[0,\infty)$有：$f_i(x+e)=f_i(x)+\bar{f}_i(e)g_i(x,e)$，且$f_i(x)\leqslant h_i\|x\|^{l_i}$，$|g_i(x,e)|\leqslant s_i(\|x\|+\|e\|)^{l_i-1}$，以及$\lim_{\|e\|\to 0}\bar{f}_i(e)=0$. 这里$h_i,s_i,l_i$均为常数，$l_i\geqslant 1$，$i=1,\cdots,m$，$e$为$R^n$中的任

何向量.

2) 存在系统(12)的 Lyapunov 函数 $V(x)$, $V(x)$是 x 的正定函数，且当 $x\neq 0$ 时 $\|\frac{\partial V}{\partial x}\|\neq 0$,并且存在关于 $\|x\|$ 的递增正函数 $a_1(\|x\|)$,使 $V(x(t))$沿着(12)轨迹的导数为

$$\frac{dV(x(t))}{dt}\leqslant -\|x\|^{l}\|\frac{\partial V}{\partial x}\|a_1(\|x\|).$$

这里 $l=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{l_i\}$.

那么，若 $z(t)$是任何渐近稳定的观测器状态，即$\lim\limits_{t\to\infty}\|z(t)-x(t)\|=0$,则采用反馈 $u_i(t)=f_i(z(t))$, $i=1,\cdots,m$ 时，闭环系统仍是全局渐近稳定的.

证　在 $u_i(t)=f_i(z(t))$下，系统(12)成为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}f_i(z(t))N_ix(t)+BF(z(t)).\tag{13}$$

这时 Lyapunov 函数 $V(x)$沿着(13)的轨迹的导数为

$$\begin{aligned}\frac{dV(x(t))}{dt}&=(\frac{\partial V(x)}{\partial x})^T\dot{x}\\&=(\frac{\partial V(x)}{\partial x})^T[Ax(t)+\sum_{i=1}^{m}f_i(x(t))N_ix(t)+BF(x(t))\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\bar{f}_i(e)g_i(x,e)N_ix(t)+B\bar{F}(x,e)],\end{aligned}\tag{14}$$

其中　$e(t)=z(t)-x(t)$, $\bar{F}(x,e)=[\bar{f}_1(e)g_1(x,e),\cdots,\bar{f}_m(e)g_m(x,e)]^T$.

由假设，$\lim\limits_{t\to\infty}\|e(t)\|=0$,因此$\|e(t)\|$在 $t\in[0,\infty)$上是一致有界的，再由条件1)可知，存在正常数 a_2、a_3、a_4、a_5使下述不等式成立：

$$\|\sum_{i=1}^{m}\bar{f}_i(e)g_i(x,e)N_ix(t)\|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\bar{f}_i(e)|\}[a_2+a_3\|x\|^{l}],\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\|B\bar{F}(x,e)\|&\leqslant[\|B\|_2^2\sum_{i=1}^{m}(\bar{f}_i(e)g_i(x,e))^2]^{1/2}\\&\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\bar{f}_i(e)|\}[a_4+a_5\|x\|^{l-1}].\end{aligned}\tag{16}$$

将条件2)及(15)、(16)代入(14)可得：

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt}\leqslant&-\|\frac{\partial V}{\partial x}\|\{a_1(\|x\|)\|x\|^{l}-\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\bar{f}_i(e)|\}\\&\cdot(a_2+a_4+a_5\|x\|^{l-1}+a_3\|x\|^{l})\}.\end{aligned}\tag{17}$$

注意到对所有$1\leqslant i\leqslant m$ 有 $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{f}_i(e)=0$,因此

$$\lim_{t\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\bar{f}_i(e)|\}=0,\ \lim_{t\to\infty}\sup_{\tau\geqslant t}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\bar{f}_i(e(\tau))|\}=0.$$

记 $s(t)=\sup\limits_{\tau\leqslant t}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{|\bar{f}_i(e(\tau))|\}$,由(17)有

$$\frac{dV(t)}{dt}\leqslant-\|\frac{\partial V}{\partial x}\|\{a_1(\|x\|)\|x\|^{l}-s(t)(a_2+a_4+a_5\|x\|^{l-1}+a_3\|x\|^{l})\}.\tag{18}$$

下面根据式(18)证明$\lim\limits_{t\to\infty}\|x\|=0$.

任给 $\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{t\to\infty}s(t)=0$,因此存在 T_ε,使 $t>T_\varepsilon$ 时 $s(t)<a_1(\varepsilon)/[a_3+a_5/\varepsilon+(a_2+a_4)\varepsilon^{-l}]$. 再由 $s(t)$ 的递降性质及 $a_1(\|x\|)$ 关于 $\|x\|$ 的递增性质可知，当 $t>T_\varepsilon$ 时，如果 $\|x\|\geqslant\varepsilon$,

则有

$$a_1(\|x\|)\|x\|^l - s(t)(a_2 + a_4 + a_5\|x\|^{l-1} + a_3\|x\|^l) > 0.$$

这说明当$\|x\|\geqslant\varepsilon$且$t>T_\varepsilon$时总有$\frac{dV(t)}{dt}<0$成立. 再由$V(x(t))$关于$x$的正定性知存在$T'$，当$t>T'$时$\|x\|<\varepsilon$恒成立.

由ε的任意性可知$\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$，这表明闭环系统(13)是全局渐近稳定的.

应该指出，文[4]所讨论的双线性系统满足本定理的条件1)、2)，具有稳定的线性状态反馈法则的线性系统也满足本定理的条件1)、2).

显然，在非线性状态反馈条件下，由分别设计状态反馈控制律和状态观测器所组成的闭环系统的稳定性值得进一步研究.

参 考 文 献

[1] Grasselli, O. M. and A. Isidori, An Existence Theorem for Observers of Bilinear Systems, IEEE Trans. A. C. —26, 6, (1981).

[2] 华向明、蒋慰孙，双线性系统采用观测器的反馈控制，信息与控制，16, 4, (1987).

[3] M. G. 沙弗诺夫著，郑应平译，多变量反馈系统的稳定性和鲁棒性，科学出版社，北京(1987).

[4] Quinn, J. P., Quadratic Feedback Control for Bilinear Systems, J. Math. Anal. and Appl., 75, (1980).

On the Asymptotic Stability of State Observer and Feedback Control with Observer's States for Bilinear Systems

Liao Dongchu, Chen Ting

(Department of Automatic Control, Huazhoug University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract: This paper proved the asymptotic stability of the state observers for a class of bilinear systems with bounded inputs, and the asymptotic stability of feedback control with stable observer's states for general bilinear systems under some assumptions.

Key words: bilinear systems; state observer; feedback control; asymptotic stability