第7卷 第4期
1990年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 7, No. 4
Dec., 1990

离散系统 l^1 优化设计的一种算法*

方华京　涂　健
(华中理工大学自控系,武汉)

摘要　本文考虑持续有界扰动信号作用下最优抗扰控制器的设计问题. 提出了一种新的算法,把无限维有约束最优化问题转化为有限维无约束极值问题直接求解,方法简单清晰.

关键词:离散系统;最优化;计算方法

1. 引　　言

系统存在不确定的外界扰动时,控制系统设计的任务常是确定一控制器使闭环系统内稳定,同时对扰动有最小的敏感性. 对扰动信号作不同的假设可产生不同的设计方法. H^∞设计方法[1]设扰动信号是平方可积的能量有限信号,而实际系统中的扰动信号,如单位阶跃,50Hz 工频干扰等一般是持续有界信号,不满足能量有限的假设. 针对这种情况 M. Vidyasagar[2]和 M. A. Dahleh[3,4]构造并研究了系统的 l^1 范数指标优化问题,并给出了一种计算方法.

本文给出了一种新的算法. 该方法先把原无限维有约束的优化问题转化为无约束有限维的极值问题,然后用数值方法求解.

2. 问题的描述

对序列 $f=\{f_i\}$ 定义

$$\|f\|_1=\sum_{i=0}^{\infty}|f_i|,\quad \|f\|_\infty=\sup_i|f_i|.$$

用 l^1 表示全体满足 $\|f\|_1<\infty$ 的序列构成的赋范线性空词,l^∞表示全体满足 $\|f\|_\infty<\infty$ 的序列构成的赋范线性空间. 对 $f=\{f_i\}$ 定义如下形式的 Z 变换**

$$F(z)=\sum_{i=0}^{\infty}f_iz^i. \tag{2.1}$$

用 A 表示 l^1 空间全体元素 Z 变换的集合. 由文献[2]知 A 代表全体 BIBO 稳定单变量离散系统的脉冲传递函数.

视 $F\in A$ 是 l^∞空间上的有界线性算子,$F:l^\infty\to l^\infty$;$F(\eta)=f*\eta$($*$ 表示卷积,$\eta\in l^\infty$),其算子范数为

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1989 年 1 月 20 日收到. 1990 年 3 月 23 日收到修改稿.

** 在 l^1 优化理论中,对序列$\{f_i\}$定义的 Z 变换与习惯形式 $\tilde{F}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}f_iz^{-i}$不同,它们之间的关系是 $\tilde{F}(z)=F(\frac{1}{z})$.

$$\|F\|_A = \sup_{\substack{\eta\in l^\infty \\ \|\eta\|_\infty\leqslant 1}} \|F(\eta)\|_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} |f_i| = \|f\|_1.\text{[3]} \tag{2.2}$$

考虑图1所示离散线性系统，其中 P 是控制对象，C 是待求的控制器，u 是参考输入，y 是输出，e 是扰动信号，且

$$e = w * d,$$

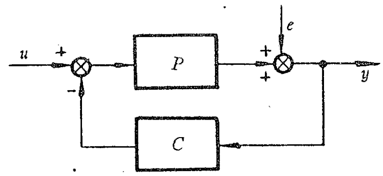

图 1 离散线性系统

$d\in l^\infty$，$\|d\|_\infty\leqslant 1$，$w\in l^1$，其 Z 变换 $W\in A$. 设计任务是求控制器 C^* 使系统内稳定，同时极小化扰动 e 在输出端产生信号的最大幅值.

令 $T=(1+PC)^{-1}W$，则由(2.2)知扰动产生的输出信号最大幅值为

$$\sup_{\substack{d\in l^\infty \\ \|d\|_\infty\leqslant 1}} \|T(d)\|_\infty = \|T\|_A = \sum_{i=0}^{\infty} |t_i| = \|t\|_1. \tag{2.3}$$

于是设计任务可表述为优化问题，

$$\mu = \inf_{C\in S(P)} \|(1+PC)^{-1}W\|_A, \tag{2.4}$$

其中 $S(P)$ 是全体内稳定 P 的控制器.

3. 计算方法

令 $P=N_p/D_p$，其中 N_p, D_p 是互质多项式，把 $S(P)$ 的参数化表达式[5]代入(2.4)，得到

$$\mu = \inf_{Q\in A}\|H - QG\|_A, \tag{3.1}$$

其中 $H=D_pYW$，$G=D_pN_pW$，$X,Y\in A$ 满足 $XN_p+YD_p=1$.

为简化下面的叙述，设 G 在 Z 平面单位圆内有 n 个互异零点 α_i，$i=1,2,\cdots,n$；又设 β_j，$j=1,2,\cdots,n_1$ 是 $\{\alpha_i\}$ 中的实数零点；β_{n_1+j}，$j=1,2,\cdots,n_2$ 和它们的共轭复数是 $\{\alpha_i\}$ 中的复数零点，$n_1+2n_2=n$.

引理 1 令 $B=H-QG$，$Q\in A$ 的充要条件是 $B\in A$，且满足

$$B(\alpha_i) = H(\alpha_i), \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.2}$$

证 明显，略.

引理 2 P 无单位圆周上的零极点时优化问题(3.1)存在最优解 Q^*，并且 $B^*=H-Q^*G$，是小于 m 次的多项式

$$B^*(z) = b_0^* + b_1^* z + \cdots + b_{m-1}^* z^{m-1}, \tag{3.3}$$

其中整数 m 满足

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^m\Big)\|\Gamma\|_\infty < 1. \tag{3.4}$$，

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 1\cdots 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_{n_1} & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+1}] & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+1}] & & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+n_2}] & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+n_2}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1^{m-1} & \beta_{n_1}^{m-1} & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+1}^{m-1}] & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+1}^{m-1}] & & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+n_2}^{m-1}] & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+n_2}^{m-1}] \end{bmatrix}.$$

(令 $\Gamma=\{r_{ij}\}$，则 $\|\Gamma\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|r_{ij}|$).

证 由文献[3]知 Q^* 存在. 式(3.3)(3.4)的推导方法与文献[4]类似，略.

由引理1,2知,对任意 $N\geqslant m$,我们可在满足约束条件(3.2)的全体小于 N 次的多项式中寻找最优解 B^*.取 $N\geqslant\max(n,m)$,由范数定义式(2.2),原优化问题可以转化为

$$\mu=\min\sum_{i=0}^{N-1}|b_i|, \tag{3.5a}$$

$$\text{s.t.}\qquad B_N(a_j)=H(a_j),\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{3.5}$$

其中 $B_N=\sum_{i=0}^{N-1}b_iz^i,\quad H=D_rYW.$

令方程(3.5b)两侧实部,虚部分别相等,得

$$EU=V \tag{3.6}$$

其中

$$E=\begin{bmatrix}1 & \beta_1 & \cdots & \beta_1^{N-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \beta_{n_1} & \cdots & \beta_{n_1}^{N-1}\\ 1 & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+1}] & \cdots & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+1}^{N-1}]\\ 0 & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+1}] & \cdots & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+1}^{N-1}]\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+n_2}] & \cdots & \mathrm{Re}[\beta_{n_1+n_2}^{N-1}]\\ 0 & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+n_2}] & \cdots & \mathrm{Im}[\beta_{n_1+n_2}^{N-1}]\end{bmatrix},\qquad V=\begin{bmatrix}H(\beta_1)\\ \vdots\\ H(\beta_{n_1})\\ \mathrm{Re}[H(\beta_{n_1+1})]\\ \mathrm{Im}[H(\beta_{n_1+1})]\\ \vdots\\ \mathrm{Re}[H(\beta_{n_1+n_2})]\\ \mathrm{Im}[H(\beta_{n_1+n_2})]\end{bmatrix},$$

$$U=(b_0,b_1,\cdots,b_{N-1})^T.$$

用 e_i 表示 E 的第 i 个列向量,记 $E_1=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$,当 $N>n$ 时方程(3.6)有无穷多个解,

$$U=\begin{bmatrix}E_1^{-1}V\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-E_1^{-1}e_{n+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}x_1+\cdots+\begin{bmatrix}-E_1^{-1}e_{n+l}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}x_l$$

$$=\Phi_0+x_1\Phi_1+\cdots+x_l\Phi_l, \tag{3.7}$$

其中 $l=N-n$,$\Phi_i=(\varphi_0^i,\varphi_1^i,\cdots,\varphi_{N-1}^i)^T$,$x_i$ 是任意实数.把(3.7)代入(3.5),即有

定理 1　优化问题(2.3)等价于

$$\mu=\min_{x_1,\cdots x_l}\sum_{i=0}^{N-1}|\varphi_i^0+x_1\varphi_i^1+\cdots+x_l\varphi_i^l|. \tag{3.8}$$

(3.8)式已经是一个有限维无约束极值问题,可用数值方法求解(可采用不需计算目标函数导数的 Powell 算法),于是可按如下步骤求取控制器.

1) 按(3.7)式得到 Φ_i;

2) 求解(3.8)得到 $B^*(z)$;

3) 由 $B^*=(1+PC^*)^{-1}W$ 解出 $C^*=(W-B^*)/PB^*$.

以上讨论的是 $N>n$ 的情况,若 $m\leqslant n$,这时可取 $N=n$,方程(3.6)只有唯一解 $U=E^{-1}V$,它就是(3.5)的最优解.

4. 算　例

给定控制对象

$$P(z)=\frac{(4z-1)}{(2z-1)},$$

权函数 $W=1$,求 l^1 优化控制器.

参数化后有 $H=(2-4z)$,$G=(4z-1)(2z-1)$. $G(z)$有两个单位圆内的零点 $\alpha_1=\frac{1}{4}$,$\alpha_2=\frac{1}{2}$. 当 $m=3$ 时

$$(|\alpha_1|^m+|\alpha_2|^m)\|\Gamma\|_\infty=0.84<1.$$

取 $N=\max(n,m)=3$,构造方程(3.6)并求解,得到 $b_0=2+\frac{1}{8}x$,$b_1=-(4-\frac{3}{4}x)$,$b_3=x$,构造优化问题(3.8)用 Powell 算法求得 $x^*=0$. 于是

$$B^*(z)=2-4z,\quad C^*=(w-B^*)/PB^*=-\frac{1}{2}.$$

闭环传函 $P(1+PC^*)^{-1}=2-8z$.

5. 结　束　语

l^1 优化设计中考虑的扰动信号比较接近系统的实际工况,本文提供的方法为求解 l^1 优化控制器提供了一种途径.

参 考 文 献

[1] Francis, B. A., A Course in H^∞ Control Theory, Springer—Verlag, New York, (1987).

[2] Vidyasagar, M., Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances, IEEE Trans., AC—31, 6, (1986), 527—534.

[3] Dahleh, M. A., Pearson, J. B., l^1 Optimal Feedback Controllers for Discrete—time Systems, Proc. Acc, Seattle, WA, June (1986), 1964—1968.

[4] Dahleh, M. A., Pearson, J. B., l^1 Optimal Feedback Controllers for MIMO Discrete—time Systems, IEEE Trans., AC—32, 4, (1987), 314—324.

[5] Vidyasagar, M., Control Systems Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press, Cambridge MA, (1985).

An Algorithm for Discrete Systems l^1 Optimization Design

Fang Huajing, Tu Jian

(Huazhong University of Science and Technology)

Abstract: The problem considered in this paper is how to design a controller to stabilize a given system and optimally reject all persistent bounded disturbances. A new algorithm is presented. This algorithm converts the infinite demension restricted optimization problem into finite demension unrestricted extreme value problem. The method is simple and clear.

Key words: discrete system; optimization; computational method