第7卷 第4期
1990年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 7, No. 4
Dec., 1990

N 维系统可分性的充要判据

邹 云
(华东工学院八系,南京)

摘要 本文给出了 N 维 Roesser 模型和一般二维系统模型[5]可分的充要判据,并将所得结果应用于可分系统的稳定性问题,得到了相应的判据.

关键词:复杂系统;线性系统;多变量

1. 引 言

近年来,A. Drabik[1]证明了当二维 Roesser 模型不可分时,系统一般而言就不再存在任何现行定义下的二维特征值,从而许多现有结果对不可分系统将不再成立[2].这样就使得判别系统的可分性显得特别重要,但本文作者查阅了自 1970—1988 上半年的大量有关文献后却未发现有任何人提出过任何形式的可分判据.本文即针对 N 维 Roesser 模型和一般二维系统模型给出了一组可分性的充要判据.

2. 可分性判据及其应用

N 维系统模型由下列方程定义[5]:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $A=[A_{ij}]_{N\times N}, B=(B_1,B_2,\cdots,B_N), C=(C_1,C_2,\cdots,C_N)$ 各为按适当维数划分的分块矩阵.

$$x' = \begin{bmatrix} x_1(i_1+1,i_2,\cdots,i_N) \\ x_2(i_1,i_2+1,\cdots,i_N) \\ x_N(i_1,i_2,\cdots,i_N+1) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1(i_1,i_2,\cdots,i_N) \\ x_2(i_1,i_2,\cdots,i_N) \\ x_N(i_1,i_2,\cdots i_N) \end{bmatrix}.$$

$x_j(i_1,i_2,\cdots,i_N)\in R^{n_j}$ 为系统(1)的第 j 个状态向量,$(j=1,2,\cdots,N)$. $u=u(i_1,i_2,\cdots,i_N)\in R^m$ 为输入向量. $y=y(i_1,i_2,\cdots,i_N)\in R^l$ 为输出向量.

上述系统的 N 维特征多项式定义为

$$P(z_1,z_2,\cdots,z_N) = \det(Z-A), \tag{2}$$

其中 $Z=\mathrm{diag}\{z_1I_{n_1},z_2I_{n_2},\cdots,z_NI_{n_N}\}$.

定义 1 称系统(1)是可分的,系指存在 $n_i(i=1,2,\cdots,N)$ 阶首一多项式 $p_i(z_i)$ 使得

$$P(z_1,z_2,\cdots,z_N) = \prod_{i=1}^{N} p_i(z_i). \tag{3}$$

定理 1 系统(1)可分的充要条件为

$$P(z_1,z_2,\cdots,z_N) = \prod_{i=1}^{N}\det(z_iI_{n_i}-A_{ii}). \tag{4}$$

本文于 1988 年 6 月 13 日收到. 1989 年 9 月 27 日收到修改稿.

证　充分性是显然的，下证必要性. 设系统(1)可分，即(3)式成立，注意到

$$\det[z_iI_{n_i}-A_{ii}]=\lim_{\substack{z_j\to\infty\\ j\neq 1}}\det\{D(z_i)[Z-A]D(z_i)\}$$

$$=\lim_{z_j\to\infty}\left[\prod_{k\neq i} z_k^{-n_k}\prod_{k=1}^{N}P_k(z_k)\right],$$

其中　$D(z_i)=\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\sqrt{z_1}}I_{n_1},\cdots,\frac{1}{\sqrt{z_{i-1}}}I_{n_{i-1}},I_{n_i},\frac{1}{\sqrt{z_{i+1}}}I_{n_{i+1}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{z_N}}I_{n_N}\right\}$.

从而由定义 1 便知 $p_i(z_i)=\det(z_iI_{n_i}-A_{ii})$. 证毕.

考察如下一般形式的二维系统[3]：

$$\begin{aligned}x(i+1,j+1)&=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)\\&\quad+B_0u(i,j)+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1),\\ y(i,j)&=Cx(i,j),\end{aligned}\tag{5}$$

其中　$x\in R^n$ 为局部状态，$u\in R^m$ 为输入向量，A_i,B_i,C 分别为适当维数的实矩阵.

对(5)在零边界条件下作二维 Z 变换[5]即得其传递函数阵为

$$P(z_1,z_2)=\det(z_1z_2I_n-A_0-z_1A_1-z_2A_2).$$

定义 2　称系统(5)为可分的，系指存在 n 阶首一多项式 $p_i(z_i)$，$(i=1,2)$，使得

$$P(z_1,z_2)=p_1(z_1)p_2(z_2).\tag{6}$$

显然与定理 1 同理我们也有：(证明略去)

定理 2　系统(5)可分当且仅当

$$P(z_1,z_2)=\det[(z_1I_n-A_2)(z_2I_n-A_1)].\tag{7}$$

由上述两个定理以及 Koo－Chen 算法，Tzafestas－Pimenides 算法[5]和 Fadeeva－Leverrier 算法[6]即可直接判定二维和三维 Roesser 模型以及(5)的某些特例的可分性. 其具体算法如下：

算法 1.

步骤 1. 利用 Koo－Chen 算法或 Tzafestas－Pimenides 算法计算二维或三维 Roesser 模型的特征多项式.

步骤 2. 利用 Fadeeva－Leverrier 算法计算多项式 $\det(z_iI_{n_i}-A_{ii})$，然后验证条件(4)即可.

定理 3[8]　设 N 维系统的特征多项式为 $P(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，则该系统稳定的充要条件为

$$P(z_1,z_2,\cdots z_N)\neq 0,\ |z_i|\geqslant 1,\quad i=1,2,\cdots,N.$$

由此及定理 1、定理 2 我们即得

定理 4　N 维 Roesser 模型若其可分，则其稳定的充要条件为 $\rho(A_{ii})<1$，　$i=1,2,\cdots,N$. 这里 $\rho(\cdot)$表示矩阵的谱半径. 可分系统(5)稳定当且仅当 $\rho(A_i)<1,i=1,2$.

注　文献[7]在二维 Roesser 模型的情形也得到了上述关于稳定性的结果. 但其证明一般并不成立. 因为该证明是建立在"任何二维可分系统均可实现为形如 $A_{21}=0$ 时的(1)(对应于 $n=2$)的形式"[7]这一结论之上，利用 Huang 判据[5]得出的. 但一般而言，二维系统并不全表示为如此形式. 如：

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&-1&-1\\ \hdashline 1&0&0\end{array}\right],\tag{8}$$

则 $P(z_1,z_2)=(z_1+1)(z_1-1)z_2$ 是可分的. 但 A_{12}或 A_{21}皆非零，显然 Ahmed[7]的证明对本例是无效的.

3. 结 束 语

本文主要提出了一组多维系统可分性的充分判据，这些结果是简单而重要的．据 Lin[4]研究结果易知：可分系统是否具有对应于 $n=2$ 时满足 $A_{21}=0$ 的(1)的形式是很重要的．因为前者可直接分解为两个一维系统状态空间模型的 Descartes 积，而后者则不行，两者有着本质的区别，故判别一系统是可分的然后将其实现为所需的标准形是非常有意义的．

参 考 文 献

[1] Drabik, A., State—Space Discrete Systems: 2—D Eigenvalues, IEEE Trans. Automat. Contr., 32, 11, (1987).

[2] Roesser, R. P., Reply to "State—Space Discrete Systems: 2—D Eigenvalues", IEEE Trans. Automat. Contr., 3, 11, (1987).

[3] Kurek, J. E., Observability and Reconstructability of 2—D Linear Digitat Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 32, 2, (1987).

[4] Lin, T., etal, Decomposition of 2—D Separable Denominator Systems, IEEE Trans. Circuits and Systems, 34, 3, (1987).

[5] 杨成梧，二维线性多变量系统，华东工学院出版社，南京，(1987).

[6] 何关钰，线性控制系统理论，辽宁人民出版社，沈阳，(1982), 94—96.

[7] Ahmed, A. R. E., On the Stability of Two—Dimensional Discrete Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 25, 3, (1980).

[8] Hertz, D., etal, On the Stability and Instability of N—Dimensional Discrete Systems, IEEE Trans, Automat. Contr., 31, 9, (1986).

The Tests for Separability of N—D Systems

Zou Yun

(East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract: A group of necessary and sufficient conditions for the separability of N—D systems is presented in this paper, and we also apply them to the tests of the stability of N—D systems.

Key words: complicated system; linear system; multivariable; multidimensional system