第8卷 第1期
1991年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 1
Mar., 1991

抛物型分布参数系统的变结构控制

胡跃明　周其节

(华南理工大学自动化系)

摘要：本文研究抛物型分布参数控制系统的变结构控制问题. 在较文[4]更一般的条件下，首先证明了等效控制法对于研究无限维变结构系统的有效性，得到了系统的滑动方程式，并讨论了滑动模的稳定性条件；然后研究了热加工等实际问题中出现的抛物型分布参数系统的滑动模设计，解决了文[4]中提出的问题.

关键词：分布参数系统；变结构控制；滑动方程；热加工

1　问题的提出

利用滑动模来设计分布参数系统是一项很有实际意义的工作，苏联学者在这方面取得了一些初步进展(参阅文[1]—[4]). 考虑下列与此类问题有关的无限维变结构系统的控制问题：

$$\begin{aligned}&\dot{x} = Ax + Bu(x,t) + f(x,t), 0 \leqslant t \leqslant T < \infty,\\&x(0) = x_0.\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x \in V$，V 是 $R^l \to R^n$ 的函数所组成的自反 Banach 空间，A 是 V 中的线性算子，满足 $\overline{D(A)} = V$，$f(x,t)$、$u(x,t)$ 分别是取值于线性空间 V 及 V_1 中的算子函数，$B \in L(V_1, V)$，($L(V_1, V)$ 表示线性空间 V_1 到 V 的全体有界算子所组成的线性空间)，今后在不引起混淆的情况下，均用 $|\cdot|$ 表示 R^k 中的范数，$\|\cdot\|$ 表示其它空间的元素的范数.

设 $S = S(x) = Cx$，$S(x) \in R^m$，$C \in L(V, V_2)$. 这里 $V_2 \subset V_1$ 是某一 Banach 子空间，在流形 $S = Cx = 0$ 上，(1)中的控制量 $u(x,t)$ 不连续的. 显然此时系统(1)包含了由偏微分方程及时滞微分方程所描述的变结构控制系统. 特别地，对于由偏微分方程描述的分布参数系统，状态空间 V 可取为 Sobolev 空间. 文[4]通过引进边界层证明了等效控制法的有效性，但条件不易验证且证明繁琐，不便于实际应用. 本文改进了文[4]中的条件，并解决了文[4]中提出的热加工等实际问题中出现的抛物型分布参数系统的变结构控制问题.

2　滑动方程式

在 $S = Cx = 0$ 的 δ—邻域内($\delta > 0$ 是一任意给定的正数)，用连续控制量 $\bar{u}(x,t)$ 代替系统(1)中的 $u(x,t)$ 得：

$$\begin{aligned}&\dot{x} = Ax + B\bar{u}(x,t) + f(x,t),\\&x(0) = x_0,\end{aligned} \tag{2}$$

并且假定此时问题(2)的解存在且属于边界层 $\|S(x)\| \leqslant \delta$ 内.

令 $\dot{S}(x) = C\dot{x} = 0$，解得等效控制量 $u_{eq}(x,t)$：

本文于 1989 年 4 月 1 日收到. 1990 年 2 月 22 日收到修改稿.

$$u_{eq}(x,t) = -(CB)^{-1}C(Ax + f(x,t)). \tag{3}$$

这里假定算子 CB 可逆，将 $u_{eq}(x,t)$ 代入(1)即得等效控制方程：

$$\dot{x} = [I - B(CB)^{-1}C]Ax + [I - B(CB)^{-1}C]f(x,t). \tag{4}$$

其中 I 是单位算子. 记 $P=B(CB)^{-1}C$，$A_0=(I-P)A$，$f_0=(I-P)f(x,t)$，则(4)等价于

$$\dot{x} = A_0x + f_0(x,t). \tag{5}$$

定理 1 在下列条件下：

1) $\rho(A)=\{\lambda \mid (\lambda I-A)^{-1}$存在且有界$\}$非空；且对任意 $x_0\in D(A)$，$\bar{x}_0\in D(A_0)$，初值问题

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}\dot{x} = A_0x \\ x(0) = \bar{x}_0\end{cases}$$

在区间$[0,T]$上存在连续可微的解；

2) $(CB)^{-1}$存在且是紧的；

3) 算子 P 与 A 可交换，也即

$$APx = PAx,\ x \in D(A);$$

4) $f(x,t)$关于 x 满足 Lipschitz 条件，关于 t 可测；

5) 控制量 $u(x,t)$在有界区域内有界，且(2)在边界层内有唯一的有界解.

则对于任何(5)的满足 $S(\bar{x}_0)=0$，$\bar{x}_0\in D(A_0)$，$\|x_0-\bar{x}_0\|\leqslant\delta$，$x_0\in D(A)$的解 $\bar{x}(t)$，必有

$$\lim_{\delta\to 0}\|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0, \quad 在[0,T]上一致成立.$$

定理 1 表明，在考虑了各种非理想因素后，实际滑动模态 $x(t)$可以任意接近于理想滑动模态 $\bar{x}(t)$. 在证明之前，先引入下列基本结果：

引理 1 设 $T(t)$、$\bar{T}(t)$是线性有界算子的强连续半群，A、A_0 是其相应的无限小生成元，则有

1) $\bar{T}(t)=(I-P)T(t)$；

2) $D(A)\subset D(A_0)$；

3) $T(t)x-T(s)x=\int_s^t T(\theta)Axd\theta,\quad x\in D(A)$.

由文[5]定理 1.2.6 及 $A_0=(I-P)A$ 知引理 1 中 1)成立；2)，3)也是显然成立的. 从而下面证明过程中的运算有意义.

定理 1 的证明：由条件 1)及文[5]中的定理 4.1.3 知，A、A_0 分别是某一线性有界算子的强连续半群 $T(t)$、$\bar{T}(t)$的无限小生成元. 这里 $T(t)$、$\bar{T}(t)$满足：

$$\|T(t)\| \leqslant M_1e^{\omega_1 t},\ \|\bar{T}(t)\| \leqslant M_2e^{\omega_2 t},\ t \geqslant 0, \omega_i, M_i = \text{const}, i = 1,2.$$

在边界层内，易知：

$$\bar{u}(x,t) = -(CB)^{-1}C(Ax + f(x,t)) + (CB)^{-1}C\dot{x},$$

将此代入(2)即得

$$\dot{x} = (I - P)Ax + (I - P)f(x,t) + P\dot{x}.$$

因此(2)的解 $x(t)$可表示为

$$x(t) = \bar{T}(t)x_0 + \int_0^t \bar{T}(t-s)(I-P)f(x(s),s)\mathrm{d}s + \int_0^t \bar{T}(t-s)P\dot{x}(s)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

(5)的解 $\bar{x}(t)$为

$$\bar{x}(t)=\bar{T}(t)\bar{x}_0+\int_0^t\bar{T}(t-s)(I-P)f(\bar{x}(s),s)\mathrm{d}s. \tag{7}$$

先估计(6)中的最后一项. 利用分部积分可知：

$$\begin{aligned}\int_0^t\bar{T}(t-s)P\dot{x}(s)\mathrm{d}s &= Px(t)-\bar{T}(t)Px_0+\int_0^t A_0\bar{T}(t-s)Px(s)\mathrm{d}s\\ &= Px(t)-\bar{T}(t)Px_0+\int_0^t\bar{T}(t-s)A(I-P)Px(s)\mathrm{d}s\\ &= Px(t)-\bar{T}(t)Px_0+(I-P)^2Px(t)-(I-P)T(t)(I-P)Px_0.\end{aligned}$$

注意到 $T(t)$、$\bar{T}(t)$有界及 $\|Px\|=\|B(CB)^{-1}S\|$ 可知存在 $a>0$，使得：

$$\left\|\int_0^t\bar{T}(t-s)P\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right\|\leqslant a\delta.$$

将(6)，(7)相减，并由条件(iv)及上述估计式得

$$\begin{aligned}\|x(t)-\bar{x}(t)\| &\leqslant \|\bar{T}(t)\|\ \|x_0-\bar{x}_0\|+a\delta\\ &\quad +M_0\|I-P\|\int_0^t\|\bar{T}(t-s)\|\ \|x(s)-\bar{x}(s)\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant M_2e^{\omega_2 t}\delta+a\delta+M_0\|I-P\|M_2\int_0^t e^{\omega_2(t-s)}\|x(s)-\bar{x}(s)\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant (M_2e^{\omega_2 T}+a)\delta+M_0M_2\|I-P\|e^{\omega_2 T}\int_0^t\|x(s)-\bar{x}(s)\|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

其中，M_0 是 Lipschitz 常数. 于是由 Gronwall 不等式即知定理结论成立. 因此(4)就是系统的滑动方程式.

显然定理 1 的条件 1)对于一般实际控制系统总是能满足的；对于条件 2)，特别地当 B、C 为矩阵时，就相当于矩阵 CB 的可逆性. 因此比文[4]中验证微分算子 A, A_0 可逆等条件要容易.

3 滑动模的稳定性

在定理 1 的条件下，假定系统(1)以流形 $S=Cx=0$ 上的点为初始状态，如果状态偏离切换流形少许，在不连续控制 $u(x,t)$的作用下，是否会返回到此流形上？此即滑动模的稳定性问题. 易见此时在 V_2 中，$S(x)$满足：

$$\begin{aligned}\dot{S}=C\dot{x}&=CAx+CBu(x,t)+Cf(x,t)\\ &=CB(u(x,t)-u_{eq}(x,t)).\end{aligned} \tag{8}$$

假定 V_2 满足下列条件：

(H) 若(8)的解 $S=0$ 在 R^m 中稳定，则必在 V_2 中稳定.

对于定义在有界区域上的连续函数空间、Hilbert 空间等，条件(H)均满足，而多数实际控制系统均可在这些空间中研究. 因此下面就只讨论滑动模在 R^m 中的稳定性.

1) 取控制规律为 $u(x,t)=-\alpha U(x,t)\mathrm{sign}\ S_1$. 其中 $S_1=(CB)^{-1}S$, $U(x,t)>|u_{eq}(x,t)|$, $\alpha=\mathrm{const}>0$.

考虑实泛函：$W_0(x)=[\mathrm{sign}\ S_1]^TS_1$，因 $S\neq0$，否则解已回到流形 $S=0$ 上. 故有 $S_1(x)\neq0$，因此 $|\mathrm{sign}\ S_1|\geqslant1$，从而 $W_0(x)$沿着(8)的解的导数满足：

$$\begin{aligned}\dot{W}_0(x)&=[\mathrm{sign}\ S_1]^T\dot{S}_1(x)=[\mathrm{sign}\ S_1]^T(u(x,t)-u_{eq}(x,t))\\ &\leqslant-\alpha U(x,t)|\mathrm{sign}\ S_1|^2+|\mathrm{sign}\ S_1||u_{eq}(x,t)|\end{aligned}$$

$$\leqslant -\alpha|\mathrm{sign}\ S_1|[U(x,t)-|u_{eq}(x,t)|]<0.$$

故 $S_1=0$ 在 R^m 中稳定，从而可选取适当的 C 及控制 $u(x,t)$，使得系统的解在滑动流形上渐近稳定，以保证滑动模的存在.

2) 取控制规律为
$$u(x,t)=u_{eq}(x,t)-(CB)^{-1}(KS+\varepsilon\mathrm{sign}S).$$

其中
$$K=\mathrm{diag}(k_i),\ \varepsilon=\mathrm{diag}(\varepsilon_i),\ k_i,\varepsilon_i>0,i=\overline{1,m}.$$

由(8)知：$\dot S=-KS-\varepsilon\mathrm{sign}S$.

因此此控制规律能使系统(1)在有限时间内进入滑动模，且滑动模是稳定的.

4 热加工问题的变结构控制

下面研究文[4]中提出的一般热加工问题的变结构控制：

$$\left.\begin{aligned}&\dot Q=EQ''+FQ+Bu,\\&Q'(0,t)=Q'(1,t)=0,\quad t\geqslant 0,\\&Q(y,0)=Q_0(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

其中，$\dot Q=\frac{\partial Q}{\partial t}$，$Q''=\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$，$F,B$ 是常数阵，$E=\mathrm{diag}(\lambda_i)$，$\lambda_i>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 为热物理系数，$Q=Q(y,t)\in R^n$ 为温度分布，u 是温度控制量，$u(Q,t)\in R^m$，易见当 $E=I$ 时，即为[4]中研究的问题.

定义算子：$A=E\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

$$D(A)=\{Q\in H^1(0,1),\ Q'(0)=Q'(1)=0\}.$$

其中，$H^1(0,1)$ 是 Sobolev 空间. 则 A 是下列强连续半群 $T(t)$ 的无限小生成元：

$$T(t)Q=2\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,t)\int_0^1 Q_0(y)\cos k\pi y\mathrm{d}y,\tag{10}$$

$$A_k(y,t)=\mathrm{diag}(e^{-\lambda_i k^2\pi^2 t}\cos k\pi y),$$

$$i=1,2,\cdots,n,k=0,1,2,\cdots,\|T(t)\|\leqslant 1.$$

选取滑动流形 $S=CQ(y,t)=0$ 使得 C 满足定理1中的条件，为此记

$$K=CB,P=BK^{-1}C,M=I-P,R=MF.$$

它们满足：(a) K^{-1} 存在；(b) $EP=PE$.

由 $\dot S=C\dot Q=CEQ''+CFQ+CBu=0$ 解得：

$$u_{eq}=-(CB)^{-1}(CEQ''+CFQ).$$

将此代入(9)，并利用(b)及 $S''=0$，由定理即得(9)的滑动方程式为

$$\dot Q=EQ''+RQ.\tag{11}$$

令 $C=(C_1,C_2)$. 其中 C_2 为 $m\times m$ 可逆阵，$Q=(Q_1^T,Q_2^T)^T$，$Q_1\in R^{n-m}$，$Q_2\in R^m$，则在滑动流形上有：$S=C_1Q_1+C_2Q_2=0$，故 $Q_2=-C_2^{-1}C_1Q_1$，将 R、E 写成分块矩阵形式：

$$E=\begin{pmatrix}E_1&0\\0&E_2\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}R_1&R_2\\R_3&R_4\end{pmatrix}.$$

则有

$$\dot Q_1=E_1Q_1''+(R_1-R_2C_2^{-1}C_1)Q_1=E_1Q_1''+R_0Q_1.\tag{12}$$

于是就将(11)的解的稳定性问题归结为(12)解的稳定性问题. 选取 C 使得(12)的解是稳定的.（例如当 $(R_0+R_0^T)$ 的特征根均为负时，此时(12)的解是稳定的）.

其次,设计变结构控制策略 u 使得滑动模是稳定的,为此记 $P_1=(CB)^{-1}C$, $P_2=P_1^TP_1$. 选取矩阵 C(例如取 $C=(0,I_m)$)使得

$$P_3=\frac{1}{2}(EP_2+P_2E)\geqslant 0.$$

控制策略为:

$$u=-(\alpha+\beta|Q(y,t)|)\mathrm{sign}S_1, \tag{13}$$
$$\alpha,\beta>0, S_1=(CB)^{-1}S.$$

则易见当 α、β 适当大时,滑动模是稳定的.

由于在热加工过程中,一般都具有多个通道,因此在实际设计过程中,可以结合利用递阶控制方法,以确定系统的滑动流形与控制策略.

参 考 文 献

[1] Breger, A. M. et al. Sliding Modes in Control of Distributed Plants Subjected to a Mobile Multicycle Signal (in Russian). Automation and Remote Control, 1980, (3): 72—83

[2] Orlov, Yu. V.. Using the Lyapunov Method in Distributed Systems (in Russian). Automation and Remote Control, 1983, (4): 22—28

[3] Utkin, V. I.. Sliding Mode in Optimization and Control (in Russian). Moscow: Nauka, 1981

[4] Orlov, Yu. V., Utkin, V. I.. Sliding Mode Control in Indefinite—Dimensional Systems. Automatica, 1987, 23(6): 753—757

[5] Pazy, A.. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer—Verlag, 1983

[6] Utkin, V. I.. Discontinuous Control Systems: State of Art in Theory and Applications. Munich: Proc. 10th IFAC Congress, 1988, 75—94

[7] Tzafestas, S. G.. Distributed Parameter Systems: Theory and Applications. Oxford: Pergamon Press, 1982

Variable Structure Control of Parabolic Distributed Parameter Systems

Hu Yueming, Zhou Qijie

(Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou)

Abstract: The variable structure control problems of distributed parameter control systems are studied in this paper. Firstly, under weaker conditions than in [4], the equivalent control method is proved to be available in studying infinite—dimensional variable structure systems; Secondly, the conditions of stability of sliding mode are discussed; Finally, the variable structure control problem for parabolic distributed parameter systems of heat process is studied.

Key words: distributed parameter system; variable structure control; sliding equation; heat process