二次型最优离散系统的两个必要条件

谢宋和
（郑州轻工业学院控制工程系）

摘要：本文给出了线性定常二次型最优离散系统的两个必要条件，得到了单输入单输出系统开环特征多项式系数 a_i 和最优闭环特征多项式系数 b_i 与权阵 Q 之间的直接关系. 所得结论有益于设计一个具有指定闭环极点的最优控制系统.

关键词：LQ 问题；最优离散系统；指定闭环极点

1 引　　言

对于连续系统来说，已有不少学者[1-3]针对线性最优控制问题中的权矩阵对 $(Q;R)$ 与开环特征方程、最优闭环特征方程以及状态反馈增益 F 之间的关系做了许多较为深入的研究，得到了最优闭环系统在频率内的两个必要条件[3]，为最优极点配置提供了很重要的指导作用，从而保证了系统既有线性二次型设计的反馈特性，又有极点配置方法的良好阶跃响应等双重优点. 但是，对于最优离散系统的研究要少得多，最近文[4]采用逆方法分析了二阶离散系统最优闭环极点配置问题，得到了一个闭环特征方程的系数所必需满足的条件. 本文推广了其结论，得到了多变量离散系统在频率内的必要条件，以及 SISO 系统开环特征多项式系数 a_i 和最优闭环特征多项式系数 b_i 与权矩阵 Q 之间的关系，为最优极点配置提供了一个指导性的约束条件，对于解决工程设计问题来说具有一定的实际意义.

2 最优闭环系统在频域内的必要条件

考虑一个线性定常可控多变量离散系统：

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k). \tag{2.1}$$

其中 $X(k)$ 为 n 维状态向量，$U(k)$ 为 m 维输入向量，A 和 B 分别为对应维数的常数矩阵，以及线性二次型性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{N-1}[X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k)]. \tag{2.2}$$

其中 $Q \in R^{n\times n}$，$R \in R^{m\times m}$，且 $Q \geqslant 0$，$R > 0$. 当 $N \to \infty$ 时，有最优控制规律

$$U(k) = -FX(k). \tag{2.3}$$

其中

$$F = (R + B^TPB)^{-1}B^TPA. \tag{2.4}$$

P 是矩阵代数 Riccati 方程

$$P = A^TPA - A^TPB(R + B^TPB)^{-1}B^TPA + Q \tag{2.5}$$

的非负定对称解.

从而，由(2.1)和(2.4)就构成了一个最优闭环系统：

本文于1989年5月10日收到. 1990年2月27日收到修改稿.

$$X(k+1)=(A-BF)X(k). \tag{2.6}$$

定理 1 若 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$分别是系统(2.1)和(2.6)的极点，则有如下不等式成立

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\prod_{i=1}^{n}\beta_i\leqslant 1. \tag{2.7}$$

为了证明以上定理 1，我们先给出如下引理：

引理[5] 假设 $A\in C^{n\times n},B\in C^{n\times n}$是两个埃尔米特矩阵，当 $A\geqslant B$，即$(A-B)$是非负定矩阵时，则有

$$\det A\geqslant\det B.$$

定理 1 证明如下：

把最优反馈增益 F 代入方程(2.5)有

$$P=A^TPA-A^TPBF+Q,$$

即

$$P=A^TPA_c+Q, \tag{2.8}$$

$$Q=P-A^TPA_c. \tag{2.9}$$

其中，$A_c=A-BF$.

由引理可得：

$$\det P\geqslant\det A\cdot\det P\cdot\det A_c. \tag{2.10}$$

又有

$$\det P\geqslant 0,\quad \det A=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i,\quad \det A_c=\prod_{i=1}^{n}\beta_i.$$

因此，(2.10)式就简化为

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\prod_{i=1}^{n}\beta_i\leqslant 1.$$

由此可见，以上不等式为我们在最优极点配置中选择闭环极点提供了一个先决条件，因此，它在工程设计中有一定的实际意义.

3 SISO 系统中 a_i 和 b_i 与 Q 的关系

对于一个单输入单输出系统来说，总存在一个非奇异阵 T 使该系统经一定的线性变换后成为一个可控标准型，且变换前后的系统特征多项式不变. 因此，为了简便起见，我们先考虑一个 SISO 可控标准型系统：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & & \cdots & I_{n-1} \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{n-1}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

其对应特征多项式为

$$P_0(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0,\quad a_n=1. \tag{3.2}$$

设由最优控制(2.3)构成的闭环系统矩阵为

$$A_c=\begin{bmatrix} 0 & & & I_{n-1} \\ -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{n-1}\end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

从而对应有闭环特征多项式

$$P_c(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0, \quad b_n = 1. \tag{3.4}$$

不失一般性，取 $R=1$，同时把 A、B、P、R 代入(2.4)式，则有

$$F = \frac{1}{1+P_{nn}}[-a_0P_{nn}, P_{n1} - a_1P_{nn}, \cdots, P_{n(n-1)} - a_{n-1}P_{nn}],$$

即有

$$b_0 - a_0 = -a_0 \cdot \frac{P_{nn}}{1+P_{nn}}, \tag{3.5}$$

$$b_i - a_i = \frac{1}{1+P_{nn}}(P_{ni} - a_iP_{nn}), \quad i = 1,2,\cdots,n-1. \tag{3.6}$$

因此

$$P_{nn} = \frac{a_0}{b_0} - 1, \tag{3.7}$$

$$P_{ni} = b_i - a_i + b_iP_{nn}, \quad i = 1,2,\cdots,n = 1. \tag{3.8}$$

其中，P_{ni}是矩阵 P 的第 n 行、第 i 列元素. 同样我们可以得到

$$A^TPA_c = \{C_{ij}\}, i, \quad j = 1,2,\cdots,n. \tag{3.9}$$

其中，

$$C_{ii} = -(a_{i-1} + b_{i-1})P_{(i-1)n} + a_{i-1}b_{i-1}P_{nn} + P_{(i-1)(i-1)},$$

且当 i 或 $j=0$ 时，$P_{ij}=0$.

根据(2.5)式、(3.8)式和(3.9)式有

$$q_{ii} = P_{ii} - P_{(i-1)(i-1)} + \frac{a_0}{b_0}b_{i-1}^2 - a_{i-1}^2. \tag{3.10}$$

其中，q_{ii}是权阵 Q 的对角线元素.

(3.10)式两边同时取累加和，则有

$$\mathrm{tr}(Q) = \frac{a_0}{b_0}\sum_{i=0}^{n} b_i^2 - \sum_{i=0}^{n} a_i^2. \tag{3.11}$$

显然，(3.11)式反映了权矩阵 Q 与特征多项式系数 a_i、b_i 的直接关系，同时也说明了只有两个权矩阵 $Q_1 \geqslant 0$、$Q_2 \geqslant 0$ 的迹相等，才可能由 Q_1、Q_2 得到相同的最优反馈增益 F，即 Q_1 和 Q_2 是等价的. 换句话说，Q_1 和 Q_2 等价的必要条件是它们两者之迹相等.

又由于 $Q \geqslant 0$，那么 $\mathrm{tr}(Q) \geqslant 0$，即

$$\frac{a_0}{b_0}\sum_{i=0}^{n} b_i^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i^2. \tag{3.12}$$

由此可见，(3.12)式是最优闭环系统的另一个必要条件，即有

定理 2 若 a_i、$b_i(i=0,1,2,\cdots,n)$分别是开环系统(不一定是可控标准型)特征多项式 $P_0(z)$和最优闭环特征多项式 $P_c(z)$的系数，那么，a_0 和 b_0 必须同号，且有如下不等式成立

$$\frac{a_0}{b_0}\sum_{i=0}^{n} b_i^2 \geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i^2.$$

推论 对于 SISO 系统来说，最优闭环系统在频域内的必要条件是

$$0 < \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \prod_{i=1}^{n} \beta_i \leqslant 1. \tag{3.13}$$

因为 $a_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$，$b_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \beta_i$，且由定理 2 知：$a_0$ 和 b_0 同号，从而 $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i$ 和 $\prod_{i=1}^{n} \beta_i$ 同号.

综上所述，本文所得的两个必要条件在设计最优离散系统中为选择预期闭环极点具

有一定的指导意义.

若考虑一个二阶离散系统:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

其对应的开环特征多项式为 $P_0(z)=z^2+a_1z+a_0$ 以及闭环特征多项式为 $P_c(z)=z^2+b_1z+b_0$,把 a_0、a_1、a_2 和 b_0、b_1、b_2 代入(3.11)式并化简:

$$\mathrm{tr}(Q)=[\frac{a_0}{b_0}(b_1^2+(b_0-\frac{c}{2})^2+1-\frac{c^2}{4}]\geqslant 0.$$

其中

$$c=\frac{1+a_0^2+a_1^2}{a_0}.$$

显然,文[4]所得结论只是本文定理2的一个特例.

参 考 文 献

[1] Kalman, R. E.. When Is a Linear Control System Optimal. Trans. ASME(D), 1964, 86(1): 51—60

[2] 杨泰澄等. 从逆问题指定闭环极点设计最优调节器. 自动化学报, 1984, 10(4): 317—323

[3] Koussiouris, T. G.. A Necessary Condition for Optimization in the Frequency Domain. Int. J. Control, 1982, 36(2): 213—215

[4] 迟丽华等. 二阶离散系统最优闭环极点配置. 控制理论与应用, 1989, 6(1): 73—75

[5] 须田信英等著; 曹长修译. 自动控制中的矩阵理论. 北京: 科学出版社, 1979, 222—234

Two Necessary Conditions for Quadratic Optimal Discrete Systems

Xie Songhe

(Zhengzhou Institute of Light Industry)

Abstract: Two necessary conditions are given for linear constant quaduatic optimal discrete systems in this paper. The direct relation between the coefficients of the open—loop systems, the coefficients of the optimal closed—loop systems and the weighting matrix Q is obtained for SISO systems. The obtained result is significant for designing a optimal control system with prescribed closed—loop poles.

Key words: LQ problem; optimal discrete system; prescribed closed—loop poles