第8卷 第1期
1991年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 1
Mar., 1991

多重延时线性系统最优控制的 Walsh 级数分析法

杨成梧　胡健生
(华东工学院自控系，南京)

摘要：本文导出了 Walsh 级数的延时算子和超前算子，并利用这两个算子和 Walsh 级数的运算特性给出了一套多重延时线性系统最优控制的新的简便算法，直接从性能泛函着手避免了求解带多重延时的非线性 Riccati 方程，使最优控制的求解转换成了代数极值问题的求解，这是一种值得讨论的新算法.

关键词：多重延时；线性系统；最优控制；*Walsh* 级数

1　Walsh 级数运算特性分析

假设 $f(t)$ 是一个在区间 $[0,1)$ 上平方可积的任意函数，则 $f(t)$ 可近似展开成 $N(N=2^d, d$ 是正整数$)$ 阶 Walsh 级数

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{N-1} f_i \varphi_i(t) = F^T \varphi(t). \tag{1}$$

根据文献[1]，系数 f_i 由下式确定

$$f_i = \int_0^1 f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

其中

$$F = [f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{N-1}]^T, \tag{3}$$

$$\varphi(t) = [\varphi_0(t) \quad \varphi_1(t) \quad \cdots \quad \varphi_{N-1}(t)]^T. \tag{4}$$

以上 Walsh 级数的收敛性，前人已作过许多研究，结果证明收敛性是好的.

注　由于 Walsh 级数算法是一种近似算法，为了书写方便，后面不再区分等号与约等号.

积分运算矩阵是 *Walsh* 级数分析法中最重要的工具.

$$\int_0^t \varphi(t)\mathrm{d}t = P\varphi(t), \qquad t \in [0,1). \tag{5}$$

其中 P 称为积分矩阵，它是一个 $N \times N$ 维非奇异常数矩阵，P 的结构为

本文于1988年11月29日收到. 1989年9月13日收到修改稿.

$$P=\left[\begin{array}{cc:c:c:c}
\frac{1}{2} & & -\frac{1}{N/2}I_{(N/8)} & -\frac{1}{N}I_{(N/4)} & -\frac{1}{2N}I_{(N/2)} \\
\hdashline & \ddots & & & \\
\hdashline \frac{1}{N/2}I_{(N/8)} & & 0_{(N/8)} & & \\
\hdashline \multicolumn{3}{c:}{\frac{1}{N}I_{(N/4)}} & 0_{(N/4)} & \\
\hdashline \multicolumn{4}{c:}{\frac{1}{2N}I_{(N/2)}} & 0_{(N/2)}
\end{array}\right]. \tag{6}$$

I_i 是 $i\times i$ 维单位矩阵.

由 Walsh 函数的正交特性再引入 Walsh 级数的乘法特性，令

$$\Phi(t)=\varphi(t)\varphi^T(t), \tag{7}$$

$$C_N=[C_0\quad C_1\quad \cdots\quad C_{N-1}]^T, \tag{8}$$

则有

$$\Phi(t)C_N=C_{N\times N}\varphi(t). \tag{9}$$

式中 $C_{N\times N}$是 $N\times N$ 维矩阵，被定义为

$$C_{N\times N}=\begin{bmatrix} C_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} & C_{+\frac{N}{2}(\frac{N}{2}\times\frac{N}{2})} \\ C_{+\frac{N}{2}(\frac{N}{2}\times\frac{N}{2})} & C_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

子矩阵 $C_{+\frac{N}{2}(\frac{N}{2}\times\frac{N}{2})}$表示 $C_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$的每个元素下标增加$\frac{N}{2}$.

定理 1 设 Walsh 级数的延时矩阵为 D，则 D 的任意一个元素为

$$d_{ij}=\int_0^1\varphi_i(t-\tau)\cdot\varphi_j dt. \tag{11}$$

式中，τ 为延时常数，d_{ij}为 D 的第 $i+1$ 行第 $j+1$ 列元素.

证 $\varphi_i(t-\tau)$是第 $i+1$ 个延时常数为 τ 的 Walsh 级数向量，则 $\varphi_i(t-\tau)$总可展开成 Walsh 级数

$$\varphi_i(t-\tau)=\sum_{j=0}^{N-1}d_{ij}\varphi_j(t). \tag{12}$$

式中，d_{ij}是 $\varphi_i(t-\tau)$的 Walsh 级数展开式的系数，也就是 Walsh 级数延时矩阵 D 的第 $i+1$ 行第 $j+1$ 列元素. 对式(12)两边同乘 $\varphi_j(t)$并对 t 在区间$[0,1)$上积分：

$$\int_0^1\varphi_i(t-\tau)\cdot\varphi_j(t)dt=\int_0^1\Big[\sum_{j=0}^{N-1}d_{ij}\varphi_j(t)\Big]\cdot\varphi_j(t)\mathrm{d}t. \tag{13}$$

根据 Walsh 函数的正交特性得：

$$d_{ij}=\int_0^1\varphi_i(t-\tau)\cdot\varphi_j(t)\mathrm{d}t. \tag{14}$$

证毕.

对于一个有延时的函数 $f(t)$在区间 $t\in[-\tau,0)$上，$f(t)\neq0$，且 $f(t)=W(t)$，如果要将 $W(t)$在$[0,1)$区间上展开，则相当时间超前了，在此我们引入超前矩阵算子 D，得如下关

系：

$$\varphi(t+\tau)=\overline{D}\varphi(t). \tag{15}$$

定理 2　Walsh 级数的超前矩阵 $\overline{D}$ 和延时矩阵 D 有如下关系：

$$\overline{D}=D^T. \tag{16}$$

式中，T 表示转置.

证　$\varphi_i(t+\tau)$是第 $i+1$ 个超前时间为 τ 的 Walsh 级数向量，现将 $\varphi_i(t+\tau)$展开成 Walsh 级数：

$$\varphi_i(t+\tau)=\sum_{j=0}^{N-1}\bar{d}_{ij}\varphi_j(t). \tag{17}$$

式中，$\bar{d}_{ij}$是 $\varphi_i(t+\tau)$的 Walsh 级数展开式的系数，也就是 Walsh 级数超前矩阵的第 $i+1$ 行第 $j+1$ 列元素.

对式(7)两边同乘 $\varphi_j(t)$并对 t 在区间$[-\tau,1-\tau)$上积分：

$$\int_{-\tau}^{1-\tau}\varphi_i(t+\tau)\varphi_j(t)\mathrm{d}t=\int_{-\tau}^{1-\tau}\Big[\sum_{j=0}^{N-1}\bar{d}_{ij}\quad\varphi_j(t)\Big]\cdot\varphi_j(t)\mathrm{d}t. \tag{18}$$

根据 Walsh 函数的正交特性得：

$$\bar{d}_{ij}=\int_{-\tau}^{1-\tau}\varphi_i(t+\tau)\varphi_j(t)\mathrm{d}t. \tag{19}$$

令

$$t+\tau=s,$$

则上面积分式可写成

$$\begin{aligned}\bar{d}_{ij}&=\int_0^1\varphi_i(s)\varphi_j(s-\tau)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1\varphi_i(t)\varphi_j(t-\tau)\mathrm{d}t\\&=d_{ji}.\end{aligned} \tag{20}$$

显然 $\overline{D}=D^T$ 是成立的. 证毕.

有了延时算子和超前算子，我们就能很方便地分析一个延时函数的展开. 现定义一个在$[-1,0)$上的 Walsh 级数矢量 $\overline{\varphi}(t)$，它比 $\varphi(t)$超前一个标准周期.

考虑函数：

$$f(t)=\begin{cases}g(t), & t\geqslant 0,\\ \bar{g}(t), & t<0.\end{cases} \tag{21}$$

现把 $f(t-\tau)$在$[0,1)$上展开成 Walsh 级数：

$$\begin{aligned}f(t-\tau)&=G^T\varphi(t-\tau)+\overline{G}^T\overline{\varphi}(t-\tau)\\&=G^TD\varphi(t)+\overline{G}^T\varphi(t+1-\tau)\\&=(G^TD+\overline{G}^T\overline{D}')\varphi(t).\end{aligned} \tag{22}$$

其中，G^T 和 $\overline{G}^T$ 分别是 $g(t)$和 $\bar{g}(t)$在各自区间上的 Walsh 级数展开式系数向量. D 是时常数为 τ 的延时矩阵，$\overline{D}$ 是时常数为$(1-\tau)$的超前矩阵.

2　多重延时线性系统最优控制分析

考虑线性系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+\sum_{i=1}^{k}L_i(t)x(t-\tau_i)+\sum_{j=1}^{l}C_j(t)u(t-s_j),\\&x(t)=W(t),\qquad t\leqslant 0,\\&u(t)=V(t),\qquad t\leqslant 0.\end{aligned}\tag{23}$$

其中,$x(t)$是n维状态向量,$u(t)$是r维控制向量,$A(t)$和$L_i(t)(i=1,\cdots,k)$是$n\times n$维时变系数矩阵.$B(t)$和$C_j(t)(j=1,\cdots,l)$是$n\times r$维时变系数矩阵,$W(t)$和$V(t)$分别是n维和r维已知函数.

性能指标为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1[x^T(t)Q(t)x(t)+u^T(t)R(t)u(t)]dt.\tag{24}$$

其中,$Q(t)$是$n\times n$维半正定时变矩阵,$R(t)$是$r\times r$维正定时变矩阵.

把状态向量和控制向量分别展开成 Walsh 级数:

$$\begin{aligned}&x(t)=\hat{\varphi}_n^T(t)G,\\&x(t-\tau_i)=\hat{\varphi}_n^T(t)\hat{D}_i^TG+\hat{\varphi}_n^T(t)\hat{\bar{D}}_iW,\\&x(0)=\hat{\varphi}^T(t)[x_0^T\quad 0\quad\cdots\quad 0]^T=\hat{\varphi}^T(t)G_0.\\&x_0=W(0)\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\hat{D}_i=[D_i\otimes I_n]_{nN\times nN}$, (26)

$\hat{\bar{D}}_i=[\bar{D}_i\otimes I_n]_{nN\times nN}$. (27)

D_i是时常数为τ_i为延时矩阵算子,$\bar{D}_i$是时常数为$(1-\tau_i)$的超前矩阵算子,W是$W(t)$的 Walsh 级数展开式系数向量.

$$\begin{aligned}&u(t)=\hat{\varphi}_r^T(t)H,\\&u(t-s_j)=\hat{\varphi}_r^T(t)\hat{d}_j^TH+\hat{\varphi}_r^T(t)\hat{d}_j^TV.\end{aligned}\tag{28}$$

其中 $\hat{d}j=[d_j\otimes I_r]_{rN\times rN}$, (29)

$\hat{\bar{d}}_j=[\bar{d}_j\otimes I_r]_{rN\times rN}$. (30)

d_j是时常数为s_j的延时矩阵算子,$\bar{d}_j$是时常数为$(1-s_j)$的超前矩阵算子.V是$V(t)$的 Walsh 级数展开式系数向量.把系数矩阵展开成 Walsh 级数:

$$A(t)=[A_0\quad A_1\cdots A_{N-1}]\hat{\varphi}_0(t)=\hat{A}^T\hat{\varphi}_n(t),\tag{31}$$

$$B(t)=[B_0\quad B_1\cdots B_{N-1}]\hat{\varphi}_1(t)=\hat{B}^r\varphi_r(t),\tag{32}$$

$$L_i(t)=[L_{i0}\quad L_{i1}\cdots L_{iN-1}]\hat{\varphi}_n(t)=\hat{L}_i^T\varphi_n(t),\tag{33}$$

$$C_j(t)=[C_{j0}\quad C_{j1}\cdots C_{jN-1}]\hat{\varphi}_r(t)=\hat{C}_j^T\hat{\varphi}_r(t).\tag{34}$$

然后把系数矩阵与向量乘积展开成 Walsh 级数:

$$A(t)x(t)=\hat{\varphi}_n^T(t)\tilde{A}G,\tag{35}$$

$$L_i(t)x(t-\tau_i)=\hat{\varphi}_n^T(t)\tilde{L}_i[\hat{D}_i^TG+\hat{\bar{D}}_i^TW],\tag{36}$$

$$B(t)u(t)=\hat{\varphi}_n^T(t)\tilde{B}H,\tag{37}$$

$$C_j(t)u(t-s_j)=\hat{\varphi}_n^T(t)\tilde{C}_j[\hat{d}_j^TH+\hat{\bar{d}}_j^Tv].\tag{38}$$

其中根据前面给出的乘积特性得

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}A_0 & A_1 & \cdots & A_{N-1}\\ A_1 & A_0 & \cdots & A_{N-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{N-1} & A_{N-2} & \cdots & A_0\end{bmatrix},\quad \widetilde{L}_i=\begin{bmatrix}L_{i0} & L_{i1} & \cdots & L_{iN-1}\\ L_{i1} & L_{i0} & \cdots & L_{iN-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ L_{iN-1} & L_{iN-2} & \cdots & L_{i0}\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}=\begin{bmatrix}B_0 & B_1 & \cdots & B_{N-1}\\ B_1 & B_0 & \cdots & B_{N-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{N-1} & B_{N-2} & \cdots & B_0\end{bmatrix},\quad \widetilde{C}_j=\begin{bmatrix}C_{j0} & C_{j1} & \cdots & C_{jN-1}\\ C_{j1} & C_{j0} & \cdots & C_{jN-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{jN-1} & C_{jN-2} & \cdots & C_{j0}\end{bmatrix}. \tag{39}$$

把各矢量代入原系统方程并对时间 t 在$[0,t]$上积分

$$\hat{\varphi}_n^T(t)G-\hat{\varphi}_n^T(t)G_0=[\hat{\varphi}_n^T(t)\hat{P}^T\widetilde{A}G+\hat{\varphi}_n^T(t)\hat{P}^T\widetilde{B}H]$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\hat{\varphi}_n^T(t)\hat{p}^T\widetilde{L}_i[\hat{D}_i^TG+\hat{\bar{D}}_i^TW]+\sum_{j=1}^{l}\hat{\varphi}_n^T(t)\hat{P}^T\widetilde{C}_j[\hat{d}_j^TH+\hat{\bar{d}}_j^TV], \tag{40}$$

由 Walsh 级数的正交特性，上式可简化为

$$G-G_0=\hat{P}^T\widetilde{A}G+\hat{P}^T\widetilde{B}H+\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i[\hat{D}_i^TG+\hat{\bar{D}}_i^TW]$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\hat{P}^T\widetilde{C}_j[\hat{\bar{d}}_j^TH+\hat{\bar{d}}_j^TV], \tag{41}$$
$$\hat{P}=P\otimes I_n.$$

经整理得：

$$[I-\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{D}_i^T-\hat{P}^T\widetilde{A}]G=(G_0+\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{\bar{D}}_i^TW+\sum_{j=1}^{l}\hat{P}^T\widetilde{C}_j\hat{\bar{d}}_j^TV)$$
$$+(\hat{P}^T\widetilde{B}+\sum_{j=1}^{l}\hat{P}^T\widetilde{C}_j\hat{d}_j^T)H.$$

当 $\det[I-\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{D}_i^T-\hat{P}^T\widetilde{A}]\neq 0$ 时，

$$G=[I-\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{D}_i^T-\hat{P}^T\widetilde{A}]^{-1}\cdot[(G_0+\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{\bar{D}}_i^TW+\sum_{j=1}^{l}\hat{P}^T\widetilde{C}_j\hat{\bar{d}}_j^TV)$$
$$+(\hat{P}^T\widetilde{B}+\sum_{j=1}^{l}\hat{P}^T\widetilde{C}_j\hat{d}_j^T)H]$$
$$\triangleq EH+F.$$

其中

$$F=[I-\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{D}_i^T-\hat{P}^T\widetilde{A}]^{-1}(G_0+\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{\bar{D}}_iW+\sum_{j=1}^{l}\hat{P}^T\widetilde{C}_j\hat{\bar{d}}_j^TV), \tag{42}$$

$$E=[I-\sum_{i=1}^{k}\hat{P}^T\widetilde{L}_i\hat{D}_i^T-\hat{P}^T\widetilde{A}]^{-1}(\hat{P}^T\widetilde{B}+\sum_{j=1}^{l}\hat{P}^T\widetilde{C}_j\hat{d}_j^T). \tag{43}$$

把 $Q(t)$和 $R(t)$展开成 Walsh 级数：

$$Q(t)=[Q_0\quad Q_1\quad\cdots\quad Q_{N-1}]\hat{\varphi}_n^T(t)=Q^T\hat{\varphi}_n(t), \tag{44}$$
$$R(t)=[R_0\quad R_1\quad\cdots\quad R_{N-1}]\hat{\varphi}_r^T(t)=R^T\hat{\varphi}_r(t). \tag{45}$$

现把各项的 Walsh 级数代入二次型性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1[G^T\hat{\varphi}_n(t)Q^T\hat{\varphi}_n(t)\hat{\varphi}_n^T(t)G+H^T\hat{\varphi}_r(t)R^T\hat{\varphi}_r(t)\hat{\varphi}_r^T(t)H]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1[G^T\hat{\varphi}_n(t)\hat{\varphi}_n^T(t)\tilde{Q}G+H^T\hat{\varphi}_r(t)\hat{\varphi}_r^T(t)\tilde{R}H]\mathrm{d}t, \tag{46}$$

$$\tilde{Q}=\begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & \cdots & Q_{N-1} \\ Q_1 & Q_0 & \cdots & Q_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N-1} & Q_{N-2} & \cdots & Q_0 \end{bmatrix},\quad \tilde{R}=\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{N-1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N-1} & R_{N-2} & \cdots & R_0 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

根据 Walsh 级数的正交特性有

$$J=\frac{1}{2}[G^T\tilde{Q}G+H^T\tilde{R}H]. \tag{48}$$

把 $G=F+EH$ 代入上式得

$$J=\frac{1}{2}[(F+EH)^T\tilde{Q}(F+EH)+H^T\tilde{R}H].$$

这样,最优控制的性能泛函转化成了一般代数表达式,由极值必要条件,令

$$\frac{\partial J}{\partial H}=0, \tag{49}$$

$$E^T\tilde{Q}(F+EH)+\tilde{R}H=0. \tag{50}$$

立即可得最优控制的解.

$$H^*=-[E^T\tilde{Q}E+\tilde{R}]^{-1}\cdot E^T\tilde{Q}F \tag{51}$$

这样一个复杂的多重延时系统最优控制问题的求解只要通过对公式(51)式的计算便可获得结果,该公式中的每一个矩阵都是由事先的已知条件确定的,而且对任何不同结构的线性多重延时系统最优控制问题都普遍适用,并可将该公式编成一个通用计算程序,只要输入已知条件便可自动求解.

3 举例分析

考虑线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=16tx(t-\frac{1}{4})+u(t), & t\in[0,1), \\ x(t)=0, & t<0. \end{cases}$$

性能指标泛函为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1[x^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t.$$

求使 J 为最小的最优控制 $u^*(t)$.

现取 $N=4$,根据上面的计算公式,编制的计算程序得

$$H^*=[-0.42763,-0.33897,-0.20624,-0.14918].$$

则最优控制 $u^*(t)$的 Walsh 级数展开式为

$$u^*(t)=-[0.42763\varphi_0(t)+0.33897\varphi_1(t)+0.20624\varphi_2(t)+0.14918\varphi_3(t)].$$

4 结 论

以上得出的最优控制 $u^*(t)$是一个按阶梯形变化的离散函数,只要进行适当的滤波平

滑，就可得出一条与精度值非常接近的光滑连续曲线，非延时系统最优控制的讨论结果已显示了这一点(文献[1])．Walsh 展开的阶数越高，近似曲线和精确曲线就越接近，但计算量将会大大增加．由于采用滤波平滑技术，使得选用更高的展开方法来计算并没有多大的实际意义，所以合适的展开阶数完全能满足较好的精确度．而且由于 Walsh 级数本身的收敛方式并不象泰勒级数一样，而是一种特殊的采样方式来逼近原函数，可以从这个角度来说截取有限项来近似是能较好地满足一定的精确度．如果原系统是一个阶数较高的系统，则可采用大系统分析方法进行解耦，然后再用 Walsh 级数进行数值分析，这对实际问题也是有一定意义的．许多有关方面的问题将有待于进一步讨论．

参 考 文 献

[1] C. F. Chen, C. H. Hsiao. Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Contral via Walsh—function. IEEE Trans. Automat Control, AC—20; 593—603

[2] Wieslaw Marszalek. Remarks on Minmum Energy Control of Time—delay System via Walsh Function. Optimal Control Application and Methods, 1985, 6; 65—68

[3] Wen—Liang Chen. Walsh Series Analysis of Multidelay Systems. Journal of the Franklin Institute, 1982, 313(4); 207—217

Optimal Contral of Multi—delay and Time—varying Linear Systems via Walsh Series

Yang Chengwu, Hu jiansheng

(Department of Automatic Control, East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract: The delay and advance—matrix operators of walsh series are presented in this paper. By the two operators and properties of walsh series, we give a new set of simple algorithms for solving the optimal control of multidelay linear systems, which avoid the solution of the Riccati equation, simplify the calculation greatly.

Key words: multi—delay; linear systems; optimal control; walsh series