第8卷 第1期
1991年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No.
Mar., 199

最优鲁棒极点配置控制器的设计

易宜连
(华东交通大学电气工程系，南昌)

摘要：本文对动态区间系统(dynamic interval system)给出了最优鲁棒极点配置控制器的设计方法.

关键词：区间多项式；动态区间系统；最优鲁棒极点配置

1 引　言

线性二次型最优控制器和极点配置控制器的设计在工程控制中有着重要的实践意义. 然而，使用这种方法设计出的控制器仍存在着鲁棒性问题，即当系统参数发生显著变化时，闭环系统能否保持稳定，性能是否还处在要求的范围内. 该问题受到了广泛的注意，并做了大量研究. 本文便是在 Evans[1]和 Soh[2]等人工作的基础上，把线性二次型最优控制和极点配置控制相结合，对单输入单输出动态区间系统设计出一个最优鲁棒极点配置控制器.

2 最优鲁棒极点配置

2.1 问题描述

已知动态区间系统

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}, \tag{2.1}$$

式中 $B(s)$、$A(s)$均为 n 次区间多项式，其线性无关的区间系数分别为

$$\boldsymbol{b}=[b_0,b_1,\cdots,b_n]^T,\quad \boldsymbol{a}=[a_0,a_1,\cdots,a_n]^T.$$

变化区间分别为

$$[\boldsymbol{b}^-,\boldsymbol{b}^+],[\boldsymbol{a}^-,\boldsymbol{a}^+]. \tag{2.2}$$

给定标称极点为

$$\lambda_i,\quad (i=1,2,\cdots,2n-1).$$

其允许变化区间为

$$[\lambda_i-\gamma_i,\lambda_i+\gamma_i],\quad (i=1,2,\cdots 2n-1). \tag{2.3}$$

求解控制器：

$$C(s)=\frac{P(s)}{L(s)}. \tag{2.4}$$

(式中 $P(s)$、$L(s)$均是 $n-1$ 次多项式)使构成的 $2n-1$ 次闭环控制系统的极点位于给定的极点变化区间内；二次型性能指标为最小；系统的参数在给定的区间内变化时，具有一定的鲁棒性，即是最优鲁棒极点配置控制器.

本文于1989年3月13日收到. 1990年4月23日收到修改稿.

2.2 引 理

引理 1[2] 对系统(2.1)，当系统区间向量 v 在$[v^-,v^+]$内变化时，使闭环极点位于给定的变化区间内的鲁棒极点配置控制器集合为

$$S_x \triangleq \{x: |\theta(x)v - d^0| + |\theta(x)|\mu \leqslant \varepsilon\}. \tag{2.5}$$

式中 $v=[a^T,b^T]^T$，μ 为 v 与其标称值 v^0 的误差向量；$x=[l^T,p^T]^T$ ——控制向量，$l=[l_0,l_1,\cdots,l_{n-1}]^T$，$p=[p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}]^T$ 分别为 $L(s)$，$P(s)$的多项式系数；ε 为 d 与其标称值 d^0 的误差向量，$d=[d_0,d_1,\cdots,d_{2n-1}]^T$ 为 $D(s)=A(s)L(s)+P(s)B(s)$的多项式系数；

$$\theta = \begin{bmatrix} l_0 & 0 & \cdots & 0 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & & & & p_1 & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ l_{n-1} & \cdots & l_0 & 0 & p_{n-1} & \cdots & p_0 & 0 \\ 0 & l_{n-1} & \cdots & l_0 & 0 & p_{n-1} & \cdots & p_0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & l_{n-1} & 0 & \cdots & & p_{n-1} \end{bmatrix}.$$

引理 2[3] (A,b)可控，状态反馈阵 k^T 构成使二次型性能指标为最小的最优调节器的必要与充分条件是

1° $\mathrm{Re}S_i(A+bk^T)<0$， $(i=1,2,\cdots,n)$；

2° (A,k^T)可观测；

3° $\dfrac{\overline{P}(j\omega)\overline{P}(-j\omega)}{\overline{\Psi}(j\omega)\overline{\Psi}(-j\omega)}\geqslant 1$，除有限个 ω 值外，不等式总是成立．其中 $\overline{P}(s)=\det[SI-A-bk^T]$，$\overline{\Psi}(s)=\det[SI-A]$．

2.3 最优鲁棒极点配置

由引理 2 得知，状态反馈阵 k^T 对系统可产生一个最优控制．若采用式(2.4)控制器，适当地选择其参数，使其对系统产生的控制与状态反馈阵 k^T 产生的控制相同，则称控制器(2.4)为最优控制器．以下研究二者之间的关系．

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$
$$=\frac{\hat{b}_1s^{n-1}+\hat{b}_2s^{n-2}+\cdots\hat{b}_{n-1}s+\hat{b}_n}{s^n+\hat{a}_1s^{n-1}+\cdots+\hat{a}_{n-1}s+\hat{a}_n}+\frac{b_0}{a_0}.$$

式中 $\hat{b}_i=(a_0b_i-b_0a_i)/a_0^2$，$\hat{a}_i=a_i/a_0$，$(i=1,2,\cdots,n)$．

其可控标准型状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & & I_{n-1} & \\ \hdashline -\hat{a}_n & -\hat{a}_{n-1} & \cdots & -\hat{a}_1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u=AX+bu, \tag{2.6}$$

$$y=[\hat{b}_n,\hat{b}_{n-1},\cdots,\hat{b}_1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\frac{b_0}{a_0}u=C^TX+D_0u. \tag{2.7}$$

引入参量 $u_2,u_3,\cdots,u_{n-1},u_n$ 分别为输入 u 的 $1,2,\cdots,n-2,n-1$ 阶导数，令 $u=u_1$，便得

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}_1&=u_2\\\dot{u}_2&=u_3\\&\vdots\\\dot{u}_{n-1}&=u_n\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

将式(2.6)，(2.7)，(2.8)，(2.9)合成一个增广系统：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\vdots\\\dot{x}_{n-1}\\\dot{x}_n\\\dot{u}_1\\\vdots\\\dot{u}_{n-2}\\\dot{u}_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0&\cdots&\cdots&0\\0&0&1&0\cdots&0&\vdots&&&0\\\vdots&&&\ddots&0&\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&1&0&&&\vdots\\-\hat{a}_n&-\hat{a}_{n-1}&\cdots&\cdots&-\hat{a}_1&1&0&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1&0&\vdots\\\vdots&&&&&&&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\\u_1\\\vdots\\u_{n-2}\\u_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u_n,$$

$$=\tilde{A}\,\tilde{X}+\tilde{b}u_n \tag{2.9}$$

$$y=[\hat{b}_n,\hat{b}_{n-1},\cdots,b_1,0\cdots0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\u_1\\\vdots\\u_{n-1}\end{bmatrix}+D_0u=\tilde{C}^T\tilde{X}+D_0u. \tag{2.10}$$

假设对式(2.9)已求出使某个二次型性能指标为最小的最优状态反馈阵 k^T，则

$$u_n=-k^T\tilde{X}=-[K^TX+k_{n+1}u+k_{n+2}\dot{u}+\cdots+k_{2n-1}u^{(n-2)}]. \tag{2.11}$$

其中

$$K^T=[k_1,k_2,\cdots k_n].$$

定义 适当地选择控制器(2.4)中的参数，以获得与式(2.11)同一个 u_n，则称控制器(2.4)与状态反馈阵 k^T“等效”.

由以上定义即可推出下列方程组：

$$K^T=[k_1,k_2,\cdots,k_n]=\frac{1}{1+\hat{P}_0D_0}(\hat{p}_{n-1}C^T+\hat{p}_{n-2}C^TA+\cdots+\hat{p}_1C^TA^{n-2}+\hat{p}_0C^TA^{n-1}),$$

$$k_{n+1}=\frac{1}{1+\hat{p}_0D_0}(\hat{l}_{n-1}+\hat{p}_{n-1}D_0+\hat{p}_{n-2}C^Tb+\hat{p}_{n-3}C^TAb+\cdots+\hat{p}_1C^TA^{n-3}b+\hat{p}_0C^TA^{n-2}b),$$

$$k_{n+2}=\frac{1}{1+\hat{p}_0D_0}(\hat{l}_{n-2}+\hat{p}_{n-2}D_0+\hat{p}_{n-3}C^Tb+\hat{p}_{n-4}C^TAb+\cdots+\hat{p}_1C^TA^{n-4}b+\hat{p}_0C^TA^{n-3}b)$$

$$\vdots$$

$$k_{2n-2}=\frac{1}{1+\hat{p}_0D_0}(\hat{l}_2+\hat{p}_2D_0+\hat{p}_1C^Tb+\hat{p}_0C^TAb)$$

$$k_{2n-1}=\frac{1}{1+\hat{p}_0D_0}(\hat{l}_1+\hat{p}_1D_0+\hat{p}_0C^Tb). \tag{2.12}$$

其中 $\hat{l}_i=l_i/l_0,(i=1,2,\cdots,n-1),\hat{p}_i=p_i/l_0,(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 从而得出以下结论：

定理　控制器(2.4)为最优控制器的必要与充分条件是：

1° 其参数必须满足方程组(2.12)；

2° k^T 必须满足引理 2.

3　设计步骤及算法

1) 根据系统性能指标，确定闭环系统的标称极点及其变化区间，从而求出 d^0 和 ε；

2) 确定标称系统向量 v^0 及其误差向量 μ；

3) 运用引理 1 求出鲁棒极点配置控制器集合 S_x；

4) 在 S_x 中寻求控制器(2.4)，若满足上述定理，则控制器(2.4)便是最优鲁棒极点配置控制器；

5) 校验控制器，当系统参数在给定区间变化时，闭环系统的稳定性及性能变化如何.

例[2]　已知 $G(s)=\dfrac{s+b_1}{s^2-2.2s-a_2}$.

其中 $a_2\in[2.2,2.6],b_1\in[0.5,1.5]$. 对于该动态区间系统设计一个最优鲁棒极点配置控制器.

采用式(2.4)控制器，闭环系统的阶数为 3，应选的三个闭环极点为 $p_{1,2}=-1\pm j0.7$，$p_3=-10$，其允许变化区间分别为 $\Delta p_1=0.2+j0.2,\Delta p_2=-0.2-j0.2,\Delta p_3=2.0$.

由步骤 1～4 求出最优鲁棒极点配置控制器 $C(s)=\dfrac{11s+18.6}{s+1.5}$，当系统参数在给定区间变化时，闭环系统的稳定域为 $b_1>0.08a_2$.

其单位阶跃响应仿真结果如下：

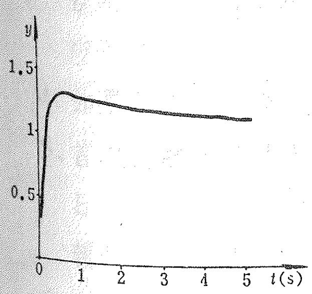

图 1　参数 $b1=1.0,a2=2.4$ 时的系统阶跃响应

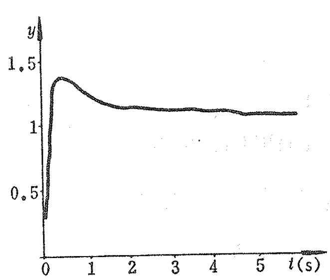

图 2　参数 $b_1=1.5,a_2=2.2$ 时的系统阶跃响应

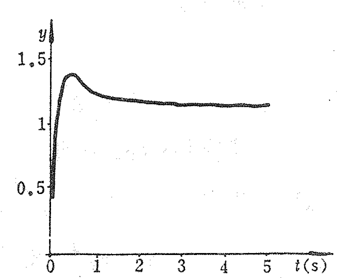

图 3　参数 $b_1=1.5,a_2=2.6$ 时的系统阶跃响应

4　结　论

采用本文对动态区间系统所设计出的最优鲁棒极点配置控制器，能使闭环系统当参

数在给定范围内变化时，具有一定的鲁棒性，并能获得好的动态性能，在工程控制中有一定使用价值.

致谢 算例时，对揭景耀，胡建华同志的协助表示谢意.

参 考 文 献

[1] Evans, R. J. and Xie Xianya. Robust Regulator Design. Int. J. Control, 1985, 41(2): 461—476

[2] Soh, Y. C., Evans, R. J., Petersen, I. R. and Betz, R. E.. Robust Pole Assignment. Automatica, 1987, 23(5): 601—610

[3] 何关钰. 线性控制系统理论. 沈阳：辽宁人民出版社，1982, 569—652

Design of Optimal Robust Pole Assignment Controller

Yi Yilian

(Department of Electrical Engineering, East China Jiao Tong University, Nanchang)

Abstract: In this paper a design method of optimal robust pole assignmnent controller is given for dynamic interval system.

Key words: interval polynomial; dynamic interval system; optimal robust pole assignment