一种参数摄动范围未知系统的鲁棒估计方法

席 斌 吴铁军
(厦门大学自动化系·厦门,361005) (浙江大学工业控制技术国家重点实验室·杭州,310027)

摘要: 对于具有参数摄动但其摄动范围未知的动态系统的状态估计问题,通过把参数摄动归并到扰动中去,则可作为确定性系统对待.由此得出的 Riccati 不等式是和一些常数有关的,若此 Riccati 不等式存在正定对称解,则可参数化状态估计器增益矩阵.计算实例表明,当参数摄动范围未知时,这是一种有效的设计方法.

关键词: 不确定; 状态估计; Riccati 不等式

Robust State Estimation For Systems with Uncertainties of Unknown Bound

Xi Bin
(Department of Automation, Xiamen University · Xiamen, 361005, P.R.China)
Wu Tiejun
(National Laboratory for Industrial Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P.R.China)

Abstract: The problem of state estimation for systems with uncertainties of unknown bound can be treated as determinant systems via ascribing uncertainty to disturbance. A parameter dependent Riccati inequality can be used to parametrize the estimator gain matrix. Numerical results show it is an effective way to solve the estimation problem of uncertain systems with unknown bound.

Key words: uncertainty; estimation; Riccati inequality

1 引言(Introduction)

结构化不确定性系统的研究在 80 年代中期引起人们重视.所谓结构化不确定性是指可以确切地知道不确定性在系统中的位置,对以状态方程描述的系统,可以在标称系统的系数矩阵上附加摄动项来表示结构特性.起初对于这种摄动的表达有很强的限制,要满足一些匹配条件,研究的内容也主要是鲁棒稳定问题.到了 90 年代,随着 H_∞ 理论的成熟,人们以 H_∞ 范数作为性能指标,使得关于摄动的表达得到放宽,可表示成范数有界且已知的时变因子.目前关于这类系统的控制和估计都已有一些结果[1,2].从这些结果来看,其共同特点是利用许多代数不等式使得不确定项消失,从而转化成确定性问题来解.因此,当遇到参数摄动范围未知时,这些方法就无法使用了.

我们知道 H_∞ 理论主要是针对系统中存在能量有限的未知扰动输入.既然参数摄动范围有界,不妨将其归并到未知输入中去[3].本文即采用这种方法来处理参数摄动范围有界但界限未知系统的状态估计问题.通过参数摄动的归并和性能变量的定义,得到一参数已知的系统,本文克服了[3]中当无参数摄动时归并前后的问题不等价的局限.然后根据有界实引理[4],得到一 Riccati 不等式,从而参数化状态估计器增益矩阵.

2 问题转化(Problem conversion)

我们用以下方程表示结构化不确定性系统,

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Bw, \\ y = (C + \Delta C(t))x + Dw, \end{cases} \tag{1}$$

A, B, C, D 为标称系统的系数矩阵, $\Delta A(t)$ 和 $\Delta C(t)$ 为时变参数摄动,一般可表示成

$$\Delta A(t) = E_1 F(t) G, \quad \Delta C(t) = E_2 F(t) G,$$

E_1, E_2 和 G 为具有适当维数的常数矩阵, $F(t)$ 为摄动范围有界但界限未知的时变因子, w 为有限能量的未知扰动. x 是状态, y 是输出.另假设对所有允许的 $F(t)$ 该系统始终是稳定的,即 $A + \Delta A(t) = A + E_1 F(t) G$ 特征值具有负实部(否则要先解控制问题使系统稳定).设状态估计器的模型为

$$\dot{x}_e = Ax_e + L(Cx_e - y), \tag{2}$$

本文于 1996 年 11 月 6 日收到. 1997 年 12 月 22 日收到修改稿.

L 为待设计的观测器增益矩阵. 定义状态估计误差 $e = x - x_e$. 我们以 w 到 e 的传递函数的 H_∞ 范数小于某一给定的正数 γ 来表示通过选择 L 可以达到的性能指标. 在时域方法中等价为 $J = \|e\|_2^2 - \gamma^2\|w\|_2^2 < 0$, 若直接对系统(1)解这个问题, 则系数矩阵中有不确定项部分. 为此我们把不确定项部分归并到未知输入中去[3], 于是把 $\Delta A(t) = E_1F(t)G$ 和 $\Delta C(t) = E_1F(t)G$ 代入(1)中并重新整理为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\varepsilon}E_1 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\gamma}F(t)Gx \\ w \end{bmatrix} = \\ \quad Ax + B_0w_0, \\ y = Cx + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\varepsilon}E_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\gamma}F(t)Gx \\ w \end{bmatrix} = \\ \quad Cx + D_0w_0, \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$B_0 = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\varepsilon}E_1 & B \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\varepsilon}E_2 & D \end{bmatrix},$$

$$w_0 = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\gamma}F(t)Gx \\ w \end{bmatrix},$$

ε 为待定常数, 在后面可见其作用可以是控制转化后的误差, w_0 相当于新的扰动输入. 由此可得关于 e 的模型为

$$\dot{e} = (A + LC)e + (B_0 + LD_0)w_0. \tag{4}$$

由于我们要解的问题是

$$J = \|e\|_2^2 - \gamma^2\|w\|_2^2 < 0,$$

对于(4)不妨定义一个新的输出变量 z, 使得若 $J_0 = \|z\|_2^2 - \gamma^2\|w_0\|_2^2 < 0$ 成立, 可保证 $J < 0$ 成立, 则我们可对无参数摄动的系统解状态估计问题. 定义

$$z = \begin{bmatrix} e \\ \frac{\varepsilon}{\delta}F(t)Gx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\delta}I & 0 \end{bmatrix} w_0 = Me + Nw_0, \tag{5}$$

δ 为常数, 由此可得 J 和 J_0 的关系为

$$J = J_0 - \varepsilon^2\left[\frac{1}{\delta^2}\|F(t)Gx\|_2^2 - \|F(t)Gx\|_2^2\right], \tag{6}$$

当无参数摄动时(即 $F(t) = 0$), J 和 J_0 是相等的. 因此根据 δ 的不同选择, J 和 J_0 有三种关系:

a) $\delta < 1, J_0 > J, J_0 < 0 \Rightarrow J < 0$.

b) $\delta = 1, J_0 = J, J_0 < 0 \Rightarrow J < 0$.

c) $\delta > 1$, 若 $J_0 < 0$, $\exists\, \varepsilon > 0$, 使得 $J < 0$.

对于 a) 和 b), 由于其不满足后面的有界实引理而被排除, 因此只有 c) 可供选择. 由于我们不知道 $F(t)$ 摄动范围, 无法验证当 $J_0 < 0$ 时, ε 和 δ 取何值方可使 $J < 0$. 但是可以从此找到一种工程化的设计方法, 即在设计过程中使得 ε 充分小、δ 充分接近于 1, 从而使 J 和 J_0 充分接近.

综上所述, 对有参数摄动系统的状态估计问题, 可表示为从 w 到 e 的传递函数 H_∞ 范数优化问题. 在转变为由(4)和(5)所组成的无参数摄动系统后, 问题转化成从 w_0 到 z 的传递函数 H_∞ 范数的优化问题. 为使转化误差较小, 参数 ε 应充分小, δ 应充分接近于 1.

3 状态估计器增益矩阵的确定(The determination of observer gain)

增益矩阵的确定应从两个方面考虑:

i) 满足未知扰动 w_0 到 z 的传递函数 H_∞ 范数约束, 等价于 $J_0 < 0_j$;

ii) 无扰动情况下能使估计误差 e 渐近趋于零.

无扰动情况下增广系统状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + LC & E_1F(t)G + LE_2F(t)G \\ 0 & A + E_1F(t)G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix}, \tag{7}$$

前已假设 $A + E_1F(t)G$ 为稳定矩阵, 故只要 $A + LC$ 为稳定矩阵即可使 e 渐近趋于零.

根据有界实引理[4], i) 成立等价于 $R_1 = \gamma^2 I - N^TN > 0$, 并且存在一正定矩阵 P 使得

$$(A + LC)^TP + P(A + LC) + \frac{1}{\gamma}M^TM + \gamma P(B_0 + LD_0)R_1^{-1}(B_0 + LD_0)^TP < 0. \tag{8}$$

由于

$$R_1 = \mathrm{diag}\left\{\gamma^2\left[1 - \frac{1}{\delta^2}\right]I, \gamma^2 I\right\},$$

所以 $R_1 > 0$ 要求 $\delta > 0$. 又由于 $M^TM = I > 0$, 若(8)成立, 则

$$(A + LC)^TP + P(A + LC) < 0,$$

可见 $A + LC$ 为稳定矩阵. 总之使得(8)成立的 L 可满足 i) 和 ii). 以下定理给出 L 的解.

定理　假设 D 或 E_2 行满秩, 则(8)成立的一个充分条件是存在一正定阵 P 使得

$$A^TP + PA + \gamma PB_0R_1^{-1}B_0^TP -$$

$$\frac{1}{\gamma}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}.$$

$$R_2^{-1}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P)+\frac{1}{\gamma}M^{\mathrm{T}}M<0, \tag{9}$$

L 可参数化为

$$L=-\frac{1}{\gamma}P^{-1}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R_2^{-1}, \tag{10}$$

其中

$$R_2=D_0R_1^{-1}D_0^{\mathrm{T}},$$

由定理假设可知 $R_2>0$.

证 对(8)式稍加整理和配平方处理后即可有

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+M^{\mathrm{T}}M+PB_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P-\frac{1}{\gamma}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R_2^{-1}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P)+$$
$$(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P+\gamma R_2L^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R_2^{-1}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P+\gamma R_2L^{\mathrm{T}}P)<0, \tag{11}$$

根据 Schur 补定理[4],上式等价于

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+M^{\mathrm{T}}M+PB_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P \\ -\frac{1}{\gamma}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R_2^{-1}(C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P) & (C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P+\gamma R_2L^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}} \\ C+\gamma D_0R_1^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P+\gamma R_2L^{\mathrm{T}}P & -R_2 \end{pmatrix}<0,$$

上式成立的一个充分条件是对角线上的元素为负,非对角线上的元素为零.这就是定理中的结论.

证毕.

4 计算示例(Numerical example)

示例是这样进行的:首先对归并后的系统,根据 H_∞ 范数的约束确定状态估计器增益矩阵,然后对归并前的系统运用得到的状态估计器,计算时变因子在一定范围内变动时扰动到观测误差的传递函数的 H_∞ 范数.现对一、二阶系统进行计算,各系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.9\\0.7\end{bmatrix},$$

$$C^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.5\\0.9\end{bmatrix},\quad D=0.2,$$

$$E_1=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix},\quad E_2=0.5,$$

$$G=[0.12\quad 0.23]$$

各常数分别取为:

$$\gamma=0.4084,\quad \varepsilon=0.4,\quad \delta=1.003.$$

关于 Riccati 不等式的解法,我们采取加上一个较小的正项使其成为等式,若这个等式存在解 P,则 P 使原不等式成立.然后可由(10)解出 L,我们得到的一个解为:

$$P=\begin{bmatrix}0.5259 & 0.2639\\ 0.2639 & 0.9406\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}-0.2101\\ -0.4143\end{bmatrix}.$$

对这一结果,设时变因子 $F(t)$ 在 $[-2\quad 2]$ 范围内变动,计算未归并系统中 w 到 e 的传递函数 H_∞ 范数的实际值,计算结果用图1显示,其中横坐标为 $F(t)$,纵坐标为 $\|T_{ew}\|_\infty$.

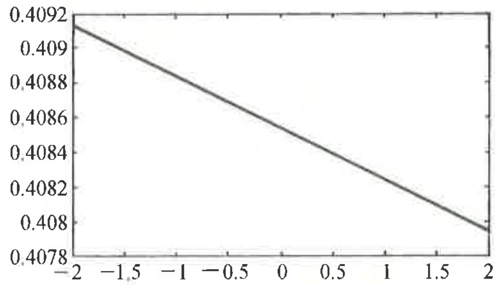

图1 $F(t)$ 与 $\|T_{ew}\|_\infty$ 的计算结果

Fig. 1 The numerical results of $F(t)$ and $\|T_{ew}\|_\infty$

已知状态观测器增益矩阵是对归并后的系统在 H_∞ 范数约束为 $\gamma=0.4084$ 的情况下得到的,而计算结果显示了在由此增益矩阵所构成的观测器情况下,原系统扰动到观测误差传递函数的 H_∞ 范数,由图可见 H_∞ 范数以 $\gamma=0.4084$ 为中心随 $F(t)$ 的波动而波动,且波动范围较小.因此本文所示的方法对参数摄动范围未知系统的状态估计问题不失为一种有效的工程化方法.

参考文献(References)

1 Khargonekar P P, Petersen I R and Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear system: quadratic stability and H_∞ theory. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(3): 356 – 361

2 Petersen I R and Macflane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. IEEE. Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(9): 1971 – 1994

3 De Souza C E, Shaked U and Fu M. Robust tracking: a game approach. Int. J. Robust and Nonlinear control, 1995, 5: 223 – 238

(下转第 278 页)

采用类似文[8]的算法,在 $R_0 = 1, Q = I_2$ 和 $\varepsilon = 0.05$,可得到 ARE(4) 的一正定解为

$$p = \begin{bmatrix} 5.7742 & 1.1853 \\ 1.1853 & 0.5261 \end{bmatrix},$$

则采用控制器 $u = -23.7052x_1 - 10.5227x_2$ 时,该系统是具有 H_∞ 范数界 $\gamma = 1$ 可镇定.

参考文献(References)

1 Petersen I R. Disturbance attenuation and H_∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, 32(5): 427 – 429

2 Xie L and de Souza C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(8): 1188 – 1191

3 Foias C, Tannenbaum A and Zames G. Weighted sensitivity minimization for delayed systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, 31(8): 763 – 766

4 Lee J H, Kim S W and Kwon W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(1): 159 – 162

5 Choi H H and Chung M J. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control. Automatica, 1995, 31(6): 917 – 919

6 Kreindler E and Jameson A. Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, 17(1): 147 – 148

7 Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

8 Petersen I R and Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems, Automatica, 1986, 22(4): 394 – 411

本文作者简介

顾永如 见本刊 1999 年第 1 期第 151 页.

王守臣 1970 年生. 1992 年毕业于南京理工大学机械系, 1995 年于该校获硕士学位, 现为浙江大学电机系博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制及智能控制.

钱积新 见本刊 1999 年第 1 期第 104 页.

(上接第 274 页)

4 Iwasaki Iand Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994, 30(8): 1307 – 1317

本文作者简介

席 斌 1963 年生. 1985 年于安徽机电学院、1992 年于合肥工业大学分别获工学学士和工学硕士学位. 1998 年在浙江大学工业控制系获博士学位, 现在厦门大学自动化系任教. 研究方向为鲁棒控制的工业应用.

吴铁军 1950 年生. 1988 年获浙江大学工业自动化专业博士学位, 现为该校工业控制研究所教授, 博士生导师, 工业控制技术国家重点实验室副主任, 中国自动化学会智能自动化委员会委员. 目前研究领域为大系统智能控制, 非线性控制, 离散事件动态系统及其复杂工业过程中的应用.