第 9 卷第 1 期
1992 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 1
Feb., 1992

快速积分控制系统等时法

姚允龙
(复旦大学数学研究所·上海,200433)

蔡常丰
(汕头大学数学系·广东,515063)

摘要：本文论述等时法解决快速控制问题的有效性．作为实例，第一次导出了弹性振动系统最优时间的明显的表达式．此外，对等时法有关的理论也作了若干推广．

关键词：快速控制；凸集；等时区；边界控制；最优时间

1 理论基础

常或变系数线性控制系统可统一归结为以下积分控制系统

$$x(t) \equiv x(t,u(\cdot)) = \int_0^t K(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{K}$$

这里轨线 $x(t)\in E_n$(n 维欧氏空间)，$K(\tau)$为 $n\times r$ 矩阵连续函数；控制 $u(\tau)$是 $r\times 1$ 向量值可测函数，它取值于 E_r 中的非空有界凸闭集 $\tilde{U}$，设 $O\in \mathrm{int}\tilde{U}$.

给定 E_n 中一集族 $R(t)$，$t\geqslant 0$，称为目标集．快速控制问题是求控制 $u(t)$及 $t_1>0$ 使

$$x(t_1,u(\cdot)) \in R(t_1) \quad 且 \quad t_1 = \min.$$

取最小值时的 t_1 称为(快速)最优时间，记为 t^*，对应的控制称为(快速)最优控制，记为 $u^*(\cdot)$.

t 等时区是指集合

$$\Omega(t) = \{x(t,u(\cdot)); \quad \forall \ 控制\ u(\cdot)\},$$

熟知它是有界凸闭集且关于 t 在 Hausdorff 意义下是连续的[2]．显然，当 $t_1<t_2$ 时，$\Omega(t_1)\subset\Omega(t_2)$.

对 $\Omega(t)$的边界 $\partial\Omega(t)$的描述构成了等时法的核心．

定理 1 对$\forall\ t_2>t_1\geqslant 0$ 有

$$\dim\{K(\tau)u; \quad \forall\ u\in E_r, \quad \tau\in[t_1,t_2]\} = n,$$

则对$\forall\ t>0$ 有

$$\partial\Omega(t) = A_t.$$

这里集 A_t 表示系统(K)最短到达时间恰为 t 的点全体．

证(用反证法) 如果$\exists\ x\in\partial\Omega(t)$可在 $t_1(<t)$时间到达，即 $x\in\Omega(t_1)$，则可引出矛盾如下：

先来证原点 O 是下列凸集的内点

$$B = \{\int_{t_1}^t K(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau; \quad 可测\ u(\tau)\in O_h(O)\}.$$

这里 $h>0$ 充分小以至 O 点的 h 邻域 $O_h(O)\subset\tilde{U}$．设 $n\times 1$ 向量 $a\perp B$，则

本文于1989年6月5日收到．1990年1月11日收到修改稿．

$$\int_{t_1}^{t} a^T K(\tau) u(\tau) \mathrm{d}\tau = 0.$$

从 $u(\tau)$ 的任意性可知 $a^T K(\tau)=0$，$\tau \in [t_1, t]$. 根据定理条件可得 $a=0$，从而 B 为凸体 $(0 \in B!)$. 对均衡凸体 B 而言，原点 O 必是它的内点.

由于 $x \in \Omega(t_1)$，从 B 的定义可得 $x+B \subset \Omega(t)$. 这表明 $x \in \mathrm{int}\Omega(t)$，与已知 $x \in \partial\Omega(t)$ 发生矛盾. 因此，$\partial\Omega(t) \subset A_t$.

反过来，$\forall\ x \in A_t$，要证 $x \in \partial\Omega(t)$. 不然的话，存在 $x \in A_t$，$x \in \mathrm{int}\Omega(t)$ 即 x 是 $\Omega(t)$ 余集 $\Omega(t)^c$ 的外点. 由于连续变动的凸集族之余集族也是连续变动的[3]，这意味着 x 也是 $\Omega(t_1)^c$ 的外点，其中 $t_1 < t$ 且 t_1 充分接近 t. 从上所述，得 $x \in \Omega(t_1)$. 这与 A_t 的定义相矛盾. 故只能是 $x \in \partial\Omega(t)$，从而 $\partial\Omega(t) = A_t$.

从定理 1 推知，在定理 1 的条件满足时，$\partial\Omega(t)$ 是互不相交的.

若$\exists$ $n\times 1$ 维向量 $l \neq 0$ 及可测函数 $u(t) \in \tilde{U}$ 满足

$$l^T K(t) u(t) = \max_{u \in \tilde{U}} l^T K(t) u, \quad \forall\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

则称 $u(t)$ 为边界控制(或极值控制). 用证最大原理所熟知的办法可证.

定理 2　　$\partial\Omega(t) = \{x(t, u(\cdot));\forall$ 边界控制 $u(\cdot)\}$.

这里特别指出定理 2 成立的条件仅是本文的基本假设，即 $K(\tau)$ 连续，$\tilde{U}$ 为非空有界凸闭集.

再来讨论系统(K)的极值控制与最优控制的唯一性.

定理 3　如果对 $\forall\ n\times 1$ 非零向量 l 和 $\tilde{U}$ 的每个面都存在一个非零向量 w 使得集 $\{t; l^T K(t) w = 0, t \geqslant 0\}$ 仅是零测度集，则对每个 $l \neq 0$，极值控制 $u(t)$ 必唯一(除去一个零集)，这时最优控制也必唯一(除去一个零集).

定理 3 的条件是最广位置条件的推广[1].

证　u 的线性函数 $l^T K(t) u$ 在 $\tilde{U}$ 上的最大值只能在 $\tilde{U}$ 的端点或某个面上达到. 如仅在 $\tilde{U}$ 的某个端点上取最大值，则 $u(t)$ 是唯一的；如在 $\tilde{U}$ 的某个面上取最大值，则这个面上存在一非零向量 w 使等式

$$l^T K(t) w = 0$$

成立的 $t \geqslant 0$ 仅是一个零集. 因此，极值控制几乎处处是唯一的，仿文献[1]的办法可证最优控制也是唯一的.

2　实　　例

问题 1　$\ddot{x}=u$，$|u| \leqslant 1$，$x(0)=\dot{x}(0)=0$，　$\begin{pmatrix} x(t_1) \\ \dot{x}(t_1) \end{pmatrix} \in R(t_1)$，　$t_1 = \min$.

解　方程的解可表成$(\tau = t-s, u(s)=v(t-s))$：

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t (t-s) u(s) \mathrm{d}s = \int_0^t \tau v(\tau) \mathrm{d}\tau, \\ y(t) \equiv \dot{x}(t) = \int_0^t u(s) \mathrm{d}s = \int_0^t v(\tau) \mathrm{d}\tau. \end{cases}$$

于是边界控制可由下式求出：$\forall\ (l_1, l_2) \neq 0$，

$$(l_1 \tau + l_2) v(\tau) = \max_{|v| \leqslant 1} (l_1 \tau + l_2) v.$$

由此可得$(0 \leqslant \beta \leqslant t$，若 $v(t)$ 在$[0, t]$中使用)

$$v(\tau)=\pm\operatorname{sgn}(\tau-\beta). \tag{2}$$

因此，$\partial\Omega(t)$的参数表示式为

$$\pm\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\int_0^t\tau\operatorname{sgn}(\tau-\beta)\mathrm{d}\tau\\ \int_0^t\operatorname{sgn}(\tau-\beta)\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{t^2}{2}-\beta^2\\ \tau-2\beta\end{bmatrix}. \tag{3}$$

其中 $0\leqslant\beta\leqslant t$，$t$ 固定，β 是参数. 消去 β，合并之得 $\partial\Omega(t)$的隐函数表示

$$(t^2-y^2)^2=4(2x-ty)^2,\quad |y|\leqslant t. \tag{4}$$

如果目标集 $R(t)$是曲线 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则代入 $\partial\Omega(t)$的表示式(4)后知最优时间 t^*是下列方程的最小正根

$$(t^2-\psi(t)^2)^2=4(2\varphi(t)-t\psi(t))^2,\quad |\psi(t)|\leqslant t.$$

求出 t^*后(若 t^*不存在，表示原问题无解)，将 t^*，$x=\varphi(t^*)$，$y=\psi(t^*)$代入(3)可求出 β^*. 从而由(2)及 $u(s)=v(t-s)$得最优控制("±"号取法等细节计算限于篇幅从略).

以上解法称等时法，与 Понтрягин 所采用的几何方法不同的是本法是代数方法. 下面来看弹性振动的快速起振(消振——若时间变号)问题，这个例子也是 Понтрягин[1]讨论过的，他没有得出给定终值 $x_0,\dot{x}_0$ 下 t^*和 $u^*(\cdot)$的表示式.

问题 2 $\ddot{x}+x=u,\quad |u|\leqslant1,\quad x(0)=\dot{x}(0)=0,\quad \begin{pmatrix}x(t_1)\\ \dot{x}(t_1)\end{pmatrix}\in R(t_1),\quad t_1=\min.$

解 有$(\tau=t-s,\quad u(s)=v(t-s))$，$\quad y=\dot{x}$：

$$\begin{cases}x(t)=\int_0^t\sin(t-s)\cdot u(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\sin\tau\cdot v(\tau)\mathrm{d}\tau,\\ y(t)=\int_0^t\cos(t-s)\cdot u(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\cos\tau\cdot v(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{cases}$$

从 $\quad(l_1\sin t+l_2\cos t)v(\tau)=\max\limits_{|v|\leqslant1}(l_1\sin t+l_2\cos t)v,\quad((l_1,l_2)\neq0)$，

得边界控制

$$v(t)=\pm\operatorname{sgn}\sin(t+\beta)=\pm H(t+\beta),\quad 0\leqslant\beta<\pi. \tag{5}$$

这里 $H(t)=1$(若 $2n\pi<t<(2n+1)\pi$；$H(t)=-1$，若$(2n+1)\pi<t<(2n+2)\pi$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$). 从而 $\partial\Omega(t)$

$$\pm\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\int_0^t H(\tau+\beta)\sin\tau\mathrm{d}\tau\\ \int_0^t H(\tau+\beta)\cos\tau\mathrm{d}\tau\end{bmatrix}. \tag{6}$$

为计算方便起见，上式改为复数表示，并作代换 $s=\tau+\beta$ 得

$$\pm z\equiv\pm(x+iy)=ie^{i\beta}\int_\beta^{t+\beta}H(s)e^{-is}\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant\beta<\pi. \tag{7}$$

注意到 $H(s)e^{-is}$有周期 π，可得等式

$$i\int_0^b H(s)e^{-is}\mathrm{d}s=(-i)\cdot(2n+1-e^{-i\Delta})\quad(b=n\pi+\Delta,0\leqslant\Delta<\pi),$$

(7)式可化为

$$\pm z=2\left[\frac{t+\beta}{\pi}\right]e^{i\beta}-e^{i\left(\pi\left[\frac{t+\beta}{\pi}\right]-t\right)}+1. \tag{8}$$

其中参数 $\beta\in[0,\pi)$. 这就是 $\partial\Omega(t)$ 的参数表示式.

为了使用方便，当 $t=k\pi-\delta,k\geqslant 1,0\leqslant\delta<\pi$ 时，(8)式分段表示成

$$\pm z=\begin{cases}2(k-1)e^{i\beta}+e^{i\delta}+1, & 0\leqslant\beta<\delta,\\ 2ke^{i\beta}-e^{i\delta}+1, & \delta\leqslant\beta<\pi.\end{cases}\tag{9}$$

当 t 固定时，k、δ 也固定，仅 β 在变. 由此可见 $\partial\Omega(t)$ 一般是由四条圆弧组成. 特殊地，当 $t=k\pi$(这时 $\delta=0$)时，$\partial\Omega(t)$ 变成一个中心圆

$$z=2ke^{i\beta},\quad 0\leqslant\beta<2\pi.\tag{10}$$

以下利用所得到的 $\partial\Omega(t)$ 表达式来解控制问题. 若 $R(t)$ 为连续曲线 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$，利用(6)～(9)求以下方程组的最小正根得 t^*

$$ie^{i\beta}\int_{\beta}^{t+\beta}H(s)e^{-is}\mathrm{d}s=\pm\left(\varphi(t)+i\psi(t)\right),\quad t>0.$$

对应的解 β^* 可得最优控制

$$u(t)=v(t^*-t)=\pm H(t^*-t+\beta^*).$$

(±号取法与有最小正根的方程相一致)这样，问题已完全解决.

当 $R(t)$ 为固定点 $(x_1,\dot{x}_1)$ 时，（这正是 Понтрягин 所讨论的情形）可进一步写出 t^*，$u^*(\cdot)$ 的显式.

事实上，当 $2(k-1)\leqslant\sqrt{x_1^2+\dot{x}_1^2}<2k$ 时（即 $k=1+[\sqrt{x_1^2+\dot{x}_1^2}/2]$）从(10)知 $t^*=k\pi-\delta$，$0\leqslant\delta<\pi$. $\partial\Omega(t)$ 由四条圆弧构成. 为了确定点 $x_1+2\dot{x}_1$ 究竟与哪条圆弧相交，在 $2(k-1)\leqslant|z|<2k$ 中将四条圆弧族的边界

$$\begin{cases}\beta=0\text{ 时} & \pm z=2k-1+e^{i\delta}, & 0\leqslant\delta<\pi\\ \beta=\delta\text{ 时} & \pm z=(2k-1)e^{i\delta}+1, & 0\leqslant\delta<\pi\end{cases}$$

绘于下图 1(当然也可不绘)，共分为①$_\pm$及②$_\pm$四个区域.

当 $x_1+i\dot{x}_1\in$ ②$_-$区时，初遇方程将是

$$-(x_1+i\dot{x}_1)=2ke^{i\beta}-e^{i\delta}+1.$$

其中 $0\leqslant\delta\leqslant\beta<\pi$. 至此，$\beta$、$\delta$ 的计算已完全归结为初等计算. 特别地，当 $\dot{x}_1=0,x_1>0$ 时，得 t^* 的表达式为

$$t^*=k\pi-\cos^{-1}\frac{1+(1+x_1)^2-4k^2}{2(1+x_1)}.$$

其中 $k=1+[x_1/2]$. 而最优控制

$$u^*(t)=-H(t^*-t+\beta^*).$$

其中

$$\beta^*=\cos^{-1}\frac{1-4k^2-(1+x_1)^2}{4k(1+x_1)}.$$

此外，等时法在高维情形用计算也较易实现.

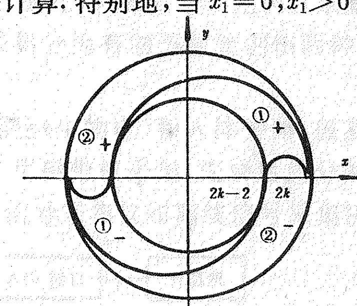

图 1　2Ω(t)由圆弧族构成的示意图

参　考　文　献

[1] Понтрягин, Л. С. 等著；陈祖浩等译. 最佳过程的数学理论. 上海：上海科技出版社，1981，107—168

[2] Hermes, H. and Lasalle, J. P.. Functional Analysis and Time Optimal Control. Academic Press, New York San Francisco London, 1969, 5

[3] Li Xunjing and Yao Yunlong. Time Optimal Control of D. P. S.. Scientia Sinica(A), 1981, 24(4):455—465

The Equal-Time Method in the Time Optimal Integral System

YAO Yunlong
(Institute of Mathematics, Fudan University · Shanghai, 200433, PRC)
CAI Changfeng
(Department of Mathematice, Shantou University · Guangdong, 515063, PRC)

Abstract: This paper mainly discusses the effectiveness of the equal-time method in solving the optimal time control problem. As a concrete example, the optimal time expression of the elastic vibration system has been derived for the first time. This paper also has made a lot of extension for the theory relevant to the equal-time method.

Key words: time optimal control; convex set; equal-time region; boundary control; optimal control

本文作者简介

姚允龙 教授. 1965 年复旦大学数学系毕业,一直在该校工作. 现从事控制理论的研究. 主要研究领域是分布参数控制系统.

蔡常丰 讲师. 1965 年武汉大学数学系毕业,分配在南京航空学院任教,1982 年 7 月调入汕头大学任教. 主要研究领域是经济数学(侧重经济控制论)与数学模型(侧重经济与生态).