第 9 卷第 1 期
1992 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 1
Feb., 1992

利用常数补偿器实现鲁棒对角优势

李元春
(吉林工业大学电子工程系·长春,130025)

吴瑶华　杨　涤
(哈尔滨工业大学空间科学与技术系,150006)

摘要: 本文研究了利用常数补偿器实现鲁棒对角优势的问题. 首先给出了系统在某一点处实现鲁棒对角优势的条件. 然后研究了系统在某一频段内鲁棒对角优势的实现问题. 最后通过一个算例说明了该方法的有效性.

关键词: 鲁棒对角优势; 常数补偿器; 多变量系统

1 引　言

Rosenbrock 提出的逆奈氏阵列设计法是多变量系统的频域理论中提出最早、应用亦较广泛的一种方法[1]. 八十年代初, Doyle 和 Stein 研究了逆奈氏阵列法的可靠性问题, 指出了对有些多变量系统, 由逆奈氏阵 列法设计的控制系统对模型的不确定性是非常敏感的, 即鲁棒性较差[2]. 1984 年, Arkun 等人推广了逆奈氏阵列方法, 提出了鲁棒逆奈氏阵列方法[3]. 这种方法的前提是实现鲁棒对角优势. 目前, 有关对角优势的实现问题研究较多[4~7]. 但关于鲁棒对角优势的实现问题研究尚少. 因此, 本文研究了利用常数补偿器实现鲁棒对角优势的问题.

2 符号说明

$\hat{G}(s), \hat{G}_p(s)$: 分别为系统的名义和实际逆传递函数矩阵,

$\Delta\hat{G}(s), \hat{Q}_p(s)$: 分别为系统的摄动矩阵和实际系统开环逆传递函数矩阵,

$K, \hat{K}$: 前置常数补偿器及其逆,

$\hat{K}_{i\cdot}, \hat{G}_{\cdot j}, \Delta\hat{G}_{\cdot j}$: 分别为 $\hat{K}$ 的第 i 行, $\hat{G}(s)$ 的第 j 列及 $\Delta\hat{G}(s)$ 的第 j 列,

$\alpha_{\cdot j}, \beta_{\cdot j}$: $\hat{G}_{\cdot j}(s)$ 的实部和虚部,

$\Delta\alpha_{\cdot j}, \Delta\beta_{\cdot j}$: $\Delta\hat{G}_{\cdot j}(s)$ 的实部和虚部.

3 鲁棒对角优势的实现

定义 如果有理函数矩阵 $\hat{Q}_p(s)$ 满足条件

$$|\hat{q}_{pii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |\hat{q}_{pij}(s)|, \tag{3.1}$$

则称 $\hat{Q}_p(s)$ 为鲁棒对角优势.

$$\hat{Q}_p(s) = \hat{K}\hat{G}_p(s) = \hat{K}[\hat{G}(s) + \Delta\hat{G}(s)], \tag{3.2}$$

$$\hat{q}_{pij}(s) = \hat{K}_{i\cdot}(\alpha_{\cdot j} + \Delta\alpha_{\cdot j}) + jK_{i\cdot}(\beta_{\cdot j} + \Delta\beta_{\cdot j}), \tag{3.3}$$

$$|\hat{q}_{pij}(s)|^2 = \hat{K}_{i\cdot}C_{pj}\hat{K}_{i\cdot}^T. \tag{3.4}$$

其中

$$C_{pj} = C_j + \Delta C_j, \quad C_j = \alpha_{oj}\alpha_{\cdot j}^T + \beta_{\cdot j}\beta_{\cdot j}^T,$$

$$\Delta C_j = \Delta\alpha_{\cdot j}\alpha_{\cdot j}^T + \alpha_{\cdot j}\Delta\alpha_{\cdot j}^T + \Delta\alpha_{\cdot j}\Delta\alpha_{\cdot j}^T + \Delta\beta_{\cdot j}\beta_{\cdot j}^T + \beta_{\cdot j}\Delta\beta_{\cdot j}^T + \Delta\beta_{\cdot j}\Delta\beta_{\cdot j}^T.$$

本文于1990年5月2日收到. 1991年3月16日收到修改稿.

由文献[7]可知,式(3.1)与下式等价

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\left[\frac{1}{m-1}|\hat{q}_{pii}(s)|^2-|\hat{q}_{pij}(s)|^2\right]>0. \tag{3.5}$$

而

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\left[\frac{1}{m-1}|\hat{q}_{pii}(s)|^2-|\hat{q}_{pij}(s)|^2\right]=\hat{K}_{i\cdot}N_{pi}\hat{K}_{i\cdot}^T. \tag{3.6}$$

其中

$$N_{pi}=N_i+\Delta N_i,\quad N_i=\frac{1}{m-1}C_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}C_j,$$

$$\Delta N_i=\frac{1}{m-1}\Delta C_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\Delta C_j.$$

引理[8]　设实对称矩阵 $A\in R^{m\times m}$的特征值为

$$\lambda_{\min}(A)=\lambda_1(A)\leqslant\lambda_2(A)\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m(A)=\lambda_{\max}(A). \tag{3.7}$$

则对任意非零向量 $X\in R^m$,有

$$\lambda_{\min}(A)XX^T\leqslant XAX^T\leqslant\lambda_{\max}(A)XX^T. \tag{3.8}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$. 当 X 为对应 $\lambda_{\min}(A)$或 $\lambda_{\max}(A)$的特征向量时,式(3.8)的左边或右边等式成立.

定理 1　设实对称矩阵 $N_{pi}=N_i+\Delta N_i$,且 $\lambda_{\max}(N_i)>0\ (i=1,2,\cdots,m)$. 其中 $N_i,\Delta N_i$ 皆为实对称矩阵. 如果矩阵 ΔN_i 满足条件

$$\lambda_{\max}(-\Delta N_i)<\lambda_{\max}(N_i), \tag{3.9}$$

则系统可由常数补偿器 K 在点 $s=j\omega$ 处实现鲁棒对角优势.

证

$$\begin{aligned}\hat{K}_{i\cdot}N_{pi}\hat{K}_{i\cdot}^T&=\hat{K}_{i\cdot}N_i\hat{K}_{i\cdot}^T-\hat{K}_{i\cdot}(-\Delta N_i)\hat{K}_{i\cdot}^T\\&=\hat{K}_{i\cdot}\hat{K}_{i\cdot}^T\lambda_{\max}(N_i)-\hat{K}_{i\cdot}(-\Delta N_i)\hat{K}_{i\cdot}^T.\end{aligned} \tag{3.10}$$

由引理可得

$$\hat{K}_{i\cdot}(-\Delta N_i)\hat{K}_{i\cdot}^T\leqslant\hat{K}_{i\cdot}\hat{K}_{i\cdot}^T\lambda_{\max}(-\Delta N_i). \tag{3.11}$$

因为 $\hat{K}_{i\cdot}\hat{K}_{i\cdot}^T\neq0$,故由式(3.9)和式(3.11)可得

$$\begin{aligned}\hat{K}_{i\cdot}N_{pi}\hat{K}_{i\cdot}^T&=\hat{K}_{i\cdot}\hat{K}_{i\cdot}^T\lambda_{\max}(N_i)-\hat{K}_{i\cdot}(-\Delta N_i)\hat{K}_{i\cdot}^T\\&\geqslant\hat{K}_{i\cdot}\hat{K}_{i\cdot}^T\lambda_{\max}(N_i)-\hat{K}_{i\cdot}\hat{K}_{i\cdot}^T\lambda_{\max}(-\Delta N_i)>0,\end{aligned} \tag{3.12}$$

故定理 1 得证.

定理 2　设系统在$[\omega_0,\omega_n]$上有 $\lambda_{\max}[N_i(\omega_h)]>0,(h=0,1,2,\cdots,n,\quad i=1,2,\cdots,m),\omega_h\in[\omega_0,\omega_n]$. 定义

$$\lambda_i\triangleq\max_h\{\lambda_{\max}[N_i(\omega_h)]+\min_{k\neq h}\{\lambda_{\min}[N_i(\omega_k)-N_i(\omega_h)]\}\}. \tag{3.13}$$

假设 λ_i 对应的频率点为 $\omega_h=\omega_l$(对应不同的 i 有不同的 l 值).

如果矩阵 $\Delta N_i(\omega_h)$满足条件

$$\max_h\{\lambda_{\max}[-\Delta N_i(\omega_h)]\}<\lambda_i, \tag{3.14}$$

则系统可由常数补偿器 K 在频段 $\omega_h\in[\omega_0,\omega_n]$内实现鲁棒对角优势.

证

$$\begin{aligned}&\hat{K}_{i\cdot}N_{pi}(\omega_h)\hat{K}_{i\cdot}^T\\&=\hat{K}_{i\cdot}[N_i(\omega_h)+N_i(\omega_l)-N_i(\omega_l)+\Delta N_i(\omega_h)]\hat{K}_{i\cdot}^T\\&=\hat{K}_{i\cdot}N_i(\omega_l)\hat{K}_{i\cdot}^T+\hat{K}_{i\cdot}[N_i(\omega_h)-N_i(\omega_l)]\hat{K}_{i\cdot}^T-\hat{K}_{i\cdot}[-\Delta N_i(\omega_h)]\hat{K}_{i\cdot}^T.\end{aligned}$$

$$=\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_{\max}[N_i(\omega_l)]+\hat{K}_{i.}[N_i(\omega_h)-N_i(\omega_l)]\hat{K}_{i.}^{T}-\hat{K}_{i.}[-\Delta N_i(\omega_h)]\hat{K}_{i.}^{T}. \quad (3.15)$$

由引理可知

$$\hat{K}_{i.}[N_i(\omega_h)-N_i(\omega_l)]\hat{K}_{i.}^{T}\geqslant\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_{\min}[N_i(\omega_h)-N_i(\omega_l)], \quad (3.16)$$

$$\hat{K}_{i.}[-\Delta N_i(\omega_h)]\hat{K}_{i.}^{T}\leqslant\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_{\max}[-\Delta N_i(\omega_h)]. \quad (3.17)$$

将式(3.16)与式(3.17)代入(3.15),可得

$$\begin{aligned}&\hat{K}_{i.}N_{pi}(\omega_h)\hat{K}_{i.}^{T}\\ &\geqslant\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_{\max}[N_i(\omega_l)]+\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_{\min}[N_i(\omega_h)-N_i(\omega_l)]-\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_{\max}[-\Delta N_i(\omega_h)]\\ &\geqslant\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_i-\hat{K}_{i.}\hat{K}_{i.}^{T}\lambda_{\max}[-\Delta N_i(\omega_h)]>0. \quad (3.18)\end{aligned}$$

定理2得证.

4 算　　例

设系统的逆传递函数矩阵及摄动矩阵分别为

$$\hat{G}(s)=\begin{bmatrix}5s+1 & s+5\\ s+0.2 & s+5\end{bmatrix},\quad \Delta\hat{G}(s)=\varepsilon\hat{G}(s).$$

其中,ε 为摄动参数,并且 $\varepsilon\in[-0.05,\ \ 0]$.

$\hat{G}(s)$的对角优势度曲线如图1所示.

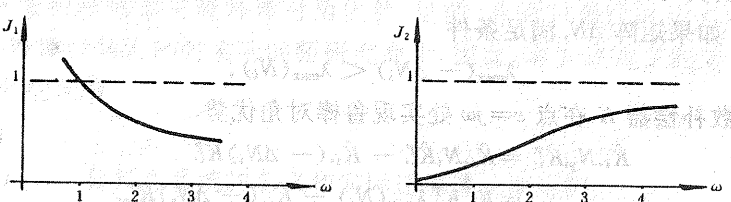

图1　对角优势度曲线

$\hat{G}(s)$的第二行为对角优势. 对于 $\omega\in[0,\ \ 1]$,第一行不是对角优势. 取 $\omega=0.5$,则有

$$N_1=\begin{bmatrix}-18 & -23.8\\ -23.8 & -24.96\end{bmatrix},\quad N_2=\begin{bmatrix}18 & 23.8\\ 23.8 & 24.96\end{bmatrix}.$$

因此,计算可得

$$\lambda_{\max}(N_1)=2.573,\quad \lambda_{\max}(N_2)=45.533,$$

$$\Delta N_1=[(\varepsilon+1)^2-1]N_1,\quad \Delta N_2=[(\varepsilon+1)^2-1]N_2,$$

$$\lambda_{\max}(-\Delta N_1)=0.25,\quad \lambda_{\max}(-\Delta N_2)=4.44.$$

由定理1可知,系统可由常数补偿器实现鲁棒对角优势,并且可得常数补偿器为

$$\hat{K}=\begin{bmatrix}0.757 & -0.654\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

5 结　　语

本文研究了利用常数补偿器实现鲁棒对角优势的问题. 定理1给出系统在某一频率点实现鲁棒对角优势的条件,由定理1还可以求出实现鲁棒对角优势的常数补偿器 K. 定理2给出了系统在某一频段内实现鲁棒对角优势的条件. 定理2的条件较复杂,在实际应用时,必须借助相应程序包. 最后通过一个算例说明了本文所提出方法的有效性.

参 考 文 献

[1] Rosenbrock, H. H.. Computer-Aided Control System Design. N. Y. Academic Press, 1974. 1—230

[2] Doyle, J. C. and Stein, C.. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, 26(1):4—16

[3] Arkun, Y., Manousiouthakis, B. and Putz, P.. Robust Nyquist Array Methodology: a New Thoretical Framework for Anlysis and Design of Robust Multivariable Feedback System. Int. J. Control, 1984, 40(4):603—629

[4] Wang Shilin, Kal Pingan. Design of Diagonal Dominance by Compensator. Int. J. Control, 1983, 38(1):221—227

[5] 聂为清. 对角优势的可实现性. 信息与控制, 1984, 13(2):1—5

[6] 江青茵. 对角优势的常数阵实现. 控制理论与应用, 1988, 5(1):84—89

[7] 李元春, 吴瑶华, 杨涤. 利用常数补偿器实现对角优势的二步法. 哈尔滨工业大学学报, 1991, (1):50—56

[8] 杨克劭. 矩阵分析. 哈尔滨工业大学出版社, 1988, 101—102

Realizations of Robust Diagonal Dominance by Constant Compensator

LI Yuanchun

(Department of Electrical Engineering, Jilin Institute of Technology · Changchun, 130025,PRC)

WU Yaohua and YANG Di

(Department of Space Science and Technology, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150006)

Abstract: In this paper, the realizations of robust diagonal dominance by constant compensator are discussed. First, the condition of realization of robust diagonal dominance at a certain point is given. Second, the condition of realization of robust diagonal dominance at a frequency domain is developed. Finally, an example is given to demonstrate the effectiveness of this method.

Key words: robust diagonal dominance; constant compensator; multivariable system

本文作者简介

李元春　1984 年毕业于吉林工学院. 1987 年在哈尔滨工业大学研究生院获工学硕士学位, 1990 年获工学博士学位. 现任吉林工业大学讲师. 目前主要研究领域是: 线性系统理论, 多变量鲁棒控制理论, 计算机控制等.

吴瑶华　见本期第 67 页.

杨　涤　教授. 1961 年毕业于哈尔滨工业大学飞行力学专业. 长期从事飞行动力学与控制方面的教学与科研工作. 1982 年～1985 年在美国威斯康星大学进修. 回国后将所学的先进技术成功地应用于飞行器新型控制方案的研究中. 目前从事空间飞行器的动力学与控制问题的研究.