第 9 卷第 1 期
1992 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 1
Feb., 1992

能控(观)广义系统集的拓扑结构*

邹 云 杨成梧

(华东工学院八系·南京,210014)

摘要: 本文讨论了能控(观)广义系统集的开性和稠密性,并从能控(观)正则系统集的拓扑结构[6]出发,讨论了相应的广义系统集的连通性,得到了较好的结果,从而将有关正则系统的结果推广到了广义系统.

关键词: 广义系统;线性系统;能控性

1 引 言

考察如下形式的广义系统

$$\theta:\begin{cases}E\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Dx.\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x\in R^n, u\in R^m, y\in R^l$. E 奇异,且 E、A 满足正则束条件

$$\det(sE-A)\neq 0,\quad s\in C,\quad C\text{ 为复平面}. \tag{2}$$

关于广义系统 $\theta(E,A,B,D)$ 的各种能控(观)性的研究已获得了丰富的结果,如完全能控(观)性、强能控(观)性、R-能控(观)性等. 这里不再给出具体定义和判据,其内容可详见[1]. 本文则从开性,稠密性和连通性三个方面对能控(观)广义系统集进行了较为透彻的研究. 由于能控性与能观性的对偶性,以下仅研究能控系统集,为叙述方便起见,我们引入如下符号:

将系统 θ 的系统数阵 (E,A,B) 的分量按一定顺序排成 $R^{\bar{n}}$ 中的向量 $(\bar{n}=2n^2+nm)$,记为 $p\{E,A,B\}$ 并称为 θ 的标称点,而将那些满足(2)和 $\det E=0$ 的标称点构成的子集记为 R^θ.

2 开性与稠密性

定理 1** 完全能控系统集为 $R^{\bar{n}}$ 中(从而亦为 R^θ 中)开集,而其它能控集如 R-能控,强能控,以及脉冲能控系统集等均非 R^θ 中(从而更非 $R^{\bar{n}}$ 中)开集.

证 这是[2]中定理 4~8 的直接推论. 作为这些定理的另一推论还有如下结论.

定理 2 R-能控及强能控系统集在 R^θ 中(按 $R^{\bar{n}}$ 在 R^θ 上的诱导拓扑)的最大开子集均为完全能控集.

注记 1 广义系统的能控性的保持能力是文[2]主要关心的问题,显然上述两个定理说明,除完全能控性外,其它的能控性包括在广义系统理论中起重要作用的强能控性的保持能力以及数值判定是很成问题的. 关于这一点[2,5]中有更详尽的论述,这里我们关心的是:这些能控集尤其是那些不具开性的能控集是否在 R^θ 中稠密,这一性质对弄清楚广

* 国家自然科学基金青年基金资助.
本文于1990年9月9日收到. 1991年9月10日收到修改稿.

** 本定理并不要求 E 必非奇异,但本节其余内容均在 R^θ 中讨论.

义系统能控性的结构特性有着十分重要的意义.

定理3 R-,强,完全及脉冲能控系统集均在 R^θ 中稠密.

证　显然,由于完全能控性⇒强能控性⇒R-能控性和脉冲能控性,故只须证明完全能控系统集在 R^θ 中稠密即可.

由[1]知:$\theta(E,A,B,D)$完全能控当且仅当

$$\operatorname{rank}(E,B)=n, \tag{3}$$

且

$$\operatorname{rank}(sE-A,B)=n,\quad \forall s\in C,\quad s\neq\infty. \tag{4}$$

任取 $p\{E,A,B\}\in R^\theta$,无妨设(E,A,B)已具有 Werestrass 标准形:

$$E=\begin{bmatrix}I_{n-l} & \\ & N\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}J & \\ & I_l\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中 N 为 $l\times l$ 维上三角 Jordan 幂零块,$B_2\in R^{l\times m}$,而 I_i 为 $i\times i$ 维单位阵.令

$$E_k=\begin{bmatrix}I_{n-l} & \\ & N+\frac{1}{k}N_0\end{bmatrix},\quad A_k=\begin{bmatrix}J_k & \\ & I_l\end{bmatrix},\quad B_k=\begin{bmatrix}B_{1k}\\ B_{2k}\end{bmatrix}. \tag{6}$$

其中 J_k 及 B_{1k}待定,而 N_0和 B_{2k}定义为

$$N_0=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ \text{\Large 0} & & & 0\end{bmatrix}_{l\times l}, \tag{7}$$

$$B_{2k}=B_2+\varepsilon\begin{bmatrix}0 & \\ \vdots & \text{\Large 0}\\ 0 & \\ 1/k & \end{bmatrix}. \tag{8}$$

这里若记 $B=(b_{ij})_{n\times m}$,则取

$$0<\varepsilon<\min_{i,j}\{|b_{ij}|:b_{ij}\neq 0\}. \tag{9}$$

显然(9)保证了 B_{2k}最后一行(即 B_k 的第 n 行)$b^T_{k(n)}$总满足:

$$b^T_{k(n)}\neq 0. \tag{10}$$

由此及(6)、(7)并注意到 N 的结构即知 $p_k\triangleq p\{E_k,A_k,B_k\}$满足(3)式,即:

$$\operatorname{rank}(E_k,B_k)=n,\quad k=1,2,\cdots. \tag{11}$$

从而以下只须证明存在一列$\{J_k,B_{1k}\}\to(J,B_1)$可使 p_k 进一步满足(4)式,即:对 $\forall s\in C$, $s\neq\infty$有

$$\operatorname{rank}(sE_k-A_k,B_k)=n,\quad k=1,2,\cdots. \tag{12}$$

即可证得本定理.令

$$N_k\triangleq N+\frac{1}{k}N_0. \tag{13}$$

则 $\det(sN_k-I_l)=(-1)^l$.故,对$\forall s\in C,s\neq\infty$有

$$\operatorname{rank}(sN_k-I_l)=l. \tag{14}$$

因此(6)式(14)式即表明(12)式与

$$\operatorname{rank}(sI_{n-l}-J_k,\ B_{1k})=n-l,\quad \forall\ s\in C \tag{15}$$

等价.事实上这已化归为一个降阶的正则系统的对应问题.由正则系统能控性的通有性[3]立即可知:必存在一列$(J_k,B_{1k})\rightarrow(J,B_1)$使得(15)成立.　　证毕.

推论 1　设 $R^g_{n-1}\triangleq\{p(E,A,B):\operatorname{rank}E=n-1,p$ 完全能控$\}$,则 R^g_{n-1}在 R^g 中稠密.

证　这是定理 3 证明过程的直接推论.

推论 2　R-,强,脉冲及完全能控性在 R^g 中均具通有性.

证　由定理 1 和定理 3 知:非完全能控集在 R^g 中(按 R^g 中诱导拓扑)测度为零.故完全能控性在 R^g 中具通有性.而其它能控性均比完全能控性要弱,故亦具同样的通有性.

注记 2　定理 3 和推论 2 说明:尽管 R-能控性和强能控性一般不具保持能力,但它们却保留了正则系统的良好性质:通有性,并且 R-能控或强能控但非完全能控的情形是十分脆弱的.这一脆弱性与正则系统的不能控性的脆弱性相类似.

3　连通性

本节主要是将 Cobb[6]的结果推广到广义系统.由于缺乏可供参考的文献,本节对连通性的物理意义未予任何考察.严格地说,本节所讨论的各类能控集(无妨泛记为 $R^g(\pi)$)的连通性系指 $R^g(\pi)\cup R_r$ 在 R^n 中的连通性,而非仅指 $R^g(\pi)$在 R^g 中的连通性.这里 $R_r\triangleq\{p\{E,A,B\}:E^{-1}$存在且$(E^{-1}A,E^{-1}B)$能控$\}$,记 $R^g(R)$为 R-能控集.

定理 4　对　$\forall\ p_0\triangleq p\{E_0,A_0,B_0\}\in R^g(R)$,均存在 $p_1\triangleq p\{E_1,A_1,B_1\}\in R_r$,使得$(p_0,p_1)$为 $R^g(R)\cup R_r$ 中的连通点对.

证　任取 $p_0\in R^g(R)$,无妨设 p_0 已具有(5)式所示的标准结构.则由 R-能控判据知:

$$\operatorname{rank}(sI_{n-l}-J,\ B_1)=n-l,\quad \forall\ s\in C,\quad s\neq\infty. \tag{16}$$

无妨设 $\sigma(J)\cap\{s:\ |s|\geqslant r_0\}=\varnothing$,令 $r_0>1$ 且

$$E_t=E+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & tI_l+tN_0\end{bmatrix},\quad A_t=A,\quad B_t=\begin{bmatrix}B_1\\ B_{2t}\end{bmatrix}. \tag{17}$$

这里 $t\in[0,1/r_0]$,N_0由(7)式定义,并且若 ε 如(9)式所定义,则

$$B_{2t}=B_2+t\begin{bmatrix}0 & \\ \vdots & 0\\ 0 & \\ \varepsilon & \end{bmatrix}. \tag{18}$$

如上节所述,这一结构保证了 B_t 的第 n 行 $b^T_{t(n)}$满足 $b^T_{t(n)}\neq 0$,从而保证了

$$\operatorname{rank}(sN_t-I_l,\ B_{2t})|_{s=1/t}=l. \tag{19}$$

其中,$N_t=t(I_l+N_0)+N$.显然这意味着对$\forall\ s\in C,t\in(0,1/r_0]$有

$$\operatorname{rank}(sN_t-I_l,B_{2t})=l. \tag{20}$$

注意到:一方面由假定知 $\operatorname{rank}(sI_{n-l}-J)=n-l,|s|\geqslant r_0$,而另一方面显然地 $\operatorname{rank}(sN_t-I_l)=l,|s|<r_0$(因为 $t\in[0,1/r_0]$),从而由(19)、(20)两式以及

$$\operatorname{rank}(sE_t-A_t,B_t)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}sI_{n-l}-J & 0 & B_1\\ 0 & sN_t-I_l & B_{2t}\end{bmatrix}.$$

可知 $\operatorname{rank}(sE_t-A_t,B_t)=n,t\in[0,1/r_0])$.此即表明 $p_t\triangleq p\{E_t,A_t,B_t\}\in R_r,t\in(0,1/r_0]$,显然 p_t是 t 的连续映射,记 $p_1\triangleq p_{1/r_0}$即证得本定理.

推论 3 定理 4 结论对强能控和完全能控集均成立.

注记 3 定理 4 和推论 3 实际上是说：R-强和完全能控集在 R^{s} 中至少具有正则系统的能控集所具有的连通性质. 例如：当 R_r 具有 k 个连通分支时，广义系统的上述各类能控集亦至多具有 k 个连通分支. 这样由 Cobb[6]关于正则系统的结果立即可得如下定理.

定理 5 设 $n\times m$ 为 B 的维数，则

1° 若 $n=$奇数，或 $m>1$，则 R-，强和完全能控集全连通.

2° 若 $n=$偶数，而 $m=1$，则 R-，强和完全能控集至多存在两个连通分支.

注记 4 上述定理表明：由于 $R^{\theta}(\pi)$的引入并未破坏 R_r 的原有连通特性. 然而我们进一步感兴趣的问题可能是：(1) $R^{\theta}(\pi)$在 R^{θ} 中的连通情况；(2) 引入 $R^{\theta}(\pi)$后对 R_r 的连通性有无改善？即：$R^{\theta}(\pi)\cup R_r$ 在 $n=$偶数，$m=1$ 时是否有可能全连通？这些问题尚待进一步研究.

参考文献

[1] 王朝珠，戴立意. 广义动态系统. 控制理论与应用，1986，3(1)：2—12

[2] 杨成梧，邹云. 广义系统能控性的鲁棒性. 华东工学院学报，1988，(1)：1—12

[3] Wonham，W. M.. 线性多变量系统. 一种几何方法. 北京：科学出版社，1984

[4] Cobb，J. D.. Controllability Observability and Duality in Singular Syatems. IEEE Trans. Automat. Contr.，1984，29(12)：1076—1082

[5] 邹云，杨成梧. 能控广义系统与不能控广义系统集之间的距离. 自动化学报，1991，17(2)：220—224

[6] Cobb，J. D.. On the Topology of Space of Controllable and Observable Syatems. IEEE Trans. Automat. Contr.，1986，31(5)：557—559

The Topological Structure of the Set of Controllable and Observable Singular Systems

ZOU Yun and YANG Chengwu

(East China Institute of Technology · Nanjing，210014，PRC)

Abstract：In this paper we have presented some results on the openness，density，genericity and connectivity of the set of controllable (observable) singular systems.

Key words：singular systems；linear systems；controllability

本文作者简介

邹 云 1983 年毕业于西北大学数学系. 1987 年和 1990 年在华东工学院获硕士和博士学位，后留校任教，现任讲师. 目前主要研究兴趣是广义系统，H_∞控制理论，2-D 系统.

杨成梧 1961 年毕业于哈尔滨军事工程学院，后一直在华东工学院任教，现为华东工学院工程热物理与飞行力学系教授. 目前主要研究领域是广义系统，2-D 系统，H_∞控制理论，离散事件动态系统，非线性系统几何方法及正交函数理论及应用.