一类多项式族的D鲁棒稳定性分析

唐建国
(四川轻化工学院电子工程系·自贡,643033)

黄家英
(成都科技大学,610065)

摘要：本文提出了一种用于多项式族D鲁棒稳定性分析的新方法,与现有的同类方法相比,本文方法更易于理解和应用.这种方法适用于复平面上任何具有连续边界的D域,它是Kharitonov定理的扩展.

关键词：多项式族;D鲁棒稳定性;测试函数

1 引 言

Kharitonov在1978年提出的关于区间多项式族稳定性的4-多项式定理[1],为众多的研究鲁棒稳定性的学者提供了启示和工具.十余年来,与这一著名定理有关的研究成果不断发表[2].但是由于Kharitonov定理有两个基本假定:一个是多项式族的系数摄动必须是独立的;另一个假定是D域为左半S平面.这些限制严重妨碍了定理的应用.因此,有许多学者力图减弱或取消这些限制,提出适用范围更广的方法.在这方面,主要成果有文献[3]提出的边缘(或称棱边)定理;文献[4]提出的鲁棒稳定性测试函数以及文献[5]对Kharitonov定理所进行的新扩展.但是边缘定理要处理l个端点多项式的配对组合,当摄动参数的个数较多时,将会出现所谓"组合爆炸"情况,难以处理.文献[5]提出的方法需要在多项式族中分离出所谓的"反稳定"多项式子族,即所有根都位于右半S开平面的多项式集合,这似乎也不是一件容易的事,且涉及到的计算也不算简单.文献[4]的方法可以算是目前同类方法中最好的一种,Barmish提出的这种方法能够用于多面体多项式族的D鲁棒稳定性判定,而且对D域的限制也放宽到S平面上任何边界连续的区域.但是这种方法仍然存在一些不足之处.例如在稳定性测试函数$H(\omega)$的求取步骤中,需要事先构成一个包含原点的区域,此区域的构成有一定的技巧性,选择不同的区域对整个计算的难易有很大的影响.同时,整个计算过程涉及到两个参数的扫描,可见计算工作量也是很大的.当然,比起边缘定理来,还是朝实用的方向前进了一步.

本文提出的方法保留了Barmish方法优点,克服了他的一些不足之处,使得这方面的研究又朝实用方向前进了一步.

值得注意的是文献[6]指出了Barmish方法的不严密性,并提出了如下三个补充条件:

1) 多项式族中所有多项式都具有相同的阶数;

2) 指定的D域具有封闭的边界(如圆域);

3) 所有端点多项式都是D稳定的.

本文于1991年2月1日收到.1991年6月19日收到修改稿.

附加三个补充条件中的任何一条，Barmish 的方法就不会出现误判的情况. 这三个补充条件本文后面也要用到.

2 基本概念

2.1 D 鲁棒稳定定义

给定复平面上任何区域 D，如果多项式的所有根都位于 D 域内，则称该多项式是 D 稳定的；如果一个多项式族中所有多项式都是 D 稳定的，则称该多项式族为 D 鲁棒稳定的.

2.2 多面体及其端点多项式

对于具有如下形式的摄动多项式

$$p(s,q)=\sum_{i=0}^{n}a_i(q)s^i. \tag{1}$$

其中 n 为多项式的阶数；q 为摄动向量. q 在某个有界集 $Q\subset R^m$ 中变化，m 是 q 向量的维数；$a_i(q)$表示多项式的系数，为 q 的函数. 于是得到一个多项式族 P

$$P=\{p(\cdot,\ q)\,|\,q\in Q\}. \tag{2}$$

如果多项式族 P 能表示成有限多个端点多项式 $p_1(s),p_2(s),\cdots,p_l(s)$的凸包，即

$$P=\mathrm{conv}\{p_1(s),p_2(s),\cdots,p_l(s)\}, \tag{3}$$

则称 P 为多面体.

当多项式的系数 $a_i(q)$是摄动向量 q 的线性函数时，P 是一个多面体，本文正是针对这类多项式族进行讨论的.

对于多面体 P，其端点多项式如下求得，假定摄动向量 q 中每一个摄动参数 q_i 都限定在一个已知的区间$[q_i^-,q_i^+]$上变化. 若 q 向量共有 m 个元素，则有界集 Q 最多有 2^m 个端点. 令

$$q^i=[q_1^i\ q_2^i\ \cdots\ q_m^i]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

为第 i 个端点，$i=1,2,\cdots,l$. 注意

$$q_j^i=q_j^-\ 或者\ q_j^+,\quad j=1,2,\cdots,m,$$

则多面体 P 的端点多项式为

$$p_i(s)=\sum_{j=0}^{n}a_j(q^i)s^j. \tag{5}$$

其中 $i=1,2,\cdots,l,\ l\leqslant 2^m$.

2.3 区间多项式族和 4-多项式定理

如果多项式具有下列形式

$$p(s,q)=\sum_{i=0}^{n}a_j(q)s^j,$$

$$\beta_i\leqslant a_i(q)\leqslant\gamma_i,\quad i=0,1,\cdots,n,$$

这样的多项式称为区间多项式. 由区间多项式构成的多项式族

$$K=\{p(s,q):\ p(s,q)=\sum_{i=0}^{n}d_j(q)s^i,\quad \beta_i\leqslant a_i(q)\leqslant\gamma_i,\}, \tag{6}$$

称为区间多项式族.

对于区间多项式族 P，其中有四个特殊构成的多项式，称为 Kharitonov 4-多项式，其

定义如下：

$$k_1(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \gamma_2 s^2 + \gamma_3 s^3 + \beta_4 s^4 + \beta_5 s^5 + \gamma_6 s^6 + \cdots,$$
$$k_2(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \beta_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \gamma_4 s^4 + \gamma_5 s^5 + \beta_6 s^6 + \cdots,$$
$$k_3(s) = \gamma_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \gamma_3 s^3 + \gamma_4 s^4 + \beta_5 s^5 + \beta_6 s^6 + \cdots,$$
$$k_4(s) = \beta_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \beta_4 s^4 + \gamma_5 s^5 + \gamma_6 s^6 + \cdots.$$

4-多项式定理说的是当 D 域为左半开复平面时，区间多项式族 P 是 D 鲁棒稳定的充要条件为上述四个多项式都是 D 稳定的.

3 问题的提出

只用 4 个多项式的 D 稳定性就能推断一族多项式的 D 鲁棒稳定性，这的确是一个令人鼓舞的结果. 如果能将此结果简单地推广到更一般的情况，那就好了. 但是非常遗憾，文献[7]证明了即使所有端点多项式都是 D 稳定的，也不能断定在一般化的 D 域条件下，多面体是 D 鲁棒稳定的. 因此才出现了各种各样的扩展方法. 但是，直到 1987 年边缘定理问世，这方面的研究才算有了突破性的进展，而目前又以 Barmish 的方法最接近实用水平. 然而，正如引言中指出的那样，这种方法仍然不够简便，于是本文提出了一个与 Barmish 方法等效的，但计算量要小得多的方法，并且对使用者没有技巧上的要求，很容易编制计算机程序，在普通的 IBM-PC 机上就能很快得到计算结果.

4 主要结果

首先定义 $\Phi_D(\omega)$为标量 $\omega \in R$ 到 D 域边界的连续映射. 例如，当 D 域为圆心在 $s=\alpha+j\beta$，半径为 1 的圆域时，可取

$$\Phi_D(\omega) = \begin{cases} (\alpha + \cos 2\pi\omega) + j(\beta + \sin 2\pi\omega), & \omega \in [0,1], \\ \text{无定义}, & \omega \notin [0,1]. \end{cases}$$

而当 D 域为左半复平面时，简单地取

$$\Phi_D(\omega) = j\omega.$$

对于任意一个固定的 $\omega \in R$，定义记号

$$R_i(\omega) = \mathrm{Re}[P_i(\Phi_D(\omega))],$$
$$I_i(\omega) = \mathrm{Im}[p_i(\Phi_D(\omega))], \quad i = 1,2,\cdots,l$$

分别表示第 i 个端点多项式在此 ω 处的实部和虚部取值，显然，$R_i(\omega)$和 $I_i(\omega)$都是具体的实数.

再定义两个实数集合

$$K_1(\omega) = \{R_i(\omega)/I_i(\omega) \mid I_i(\omega) > 0, \quad i = 1,2,\cdots,l\}, \tag{7}$$
$$K_2(\omega) = \{R_i(\omega)/I_i(\omega) \mid I_i(\omega) < 0, \quad i = 1,2,\cdots,l\}. \tag{8}$$

再定义

$$F_1(\omega) = \min K_1(\omega) - \max K_2(\omega), \tag{9}$$
$$F_2(\omega) = \min K_2(\omega) - \max K_1(\omega). \tag{10}$$

其中 $\max K_j(\omega)$和 $\min K_j(\omega)$ $(j=1,2)$分别表示取 $K_j(\omega)$集合中最大的实数和取最小的实数.

根据以上定义，得

$$F(\omega)=\begin{cases}0, & \text{存在端点多项式取值为 0 的情况,}\\ M>0, & \text{任何 } K_j(\omega)(j=1,2) \text{ 为空集,}\\ \max\{K_1(\omega),K_2(\omega)\}, & \text{其它.}\end{cases} \tag{11}$$

这就是本文要提出的D鲁棒稳定性测试函数.

定理1　对于多面体多项式族 P,D是复平面上任意指定的具有连续边界的区域,如果已知 P 中至少有一个D稳定的多项式,且满足引言中三条补充条件中的任何一条,则 P 是D鲁棒稳定的充要条件为

对所有 $\omega\in R$

$$F(\omega)>0. \tag{12}$$

定理2　在定理1同样的前提条件下,对任意取定的 $\omega\in R$,若 $I_i(\omega)$ 或者 $R_i(\omega)$ 正定(或负定),$i=1,2,\cdots,l$,则必有 $F(\omega)>0$.

定理1和定理2的证明均见附录.

说明1　本文中的 $F(\omega),R_i(\omega),I_i(\omega),K_j(\omega)$ 等都是指取定 $\omega\in R$ 后的具体数值,所谓正定(或负定)是指同一个 ω 下不同的 i 而言.

说明2　对某个固定的 $\omega\in R$,如果存在某个端点多项式的虚部为0,实部不为0的情况,为了确定比值 $R_i(\omega)/I_i(\omega)$ 应归入 $K_1(\omega)$ 还是 $K_2(\omega)$,可以用 $I_i(\omega)=0^+$ 来代替 $I_i(\omega)=0$,将其归入 $K_1(\omega)$ 中,也可以用 $I_i(\omega)=0^-$ 来代替 $I_i(\omega)=0$,相应地将其归入 $K_2(\omega)$ 中.任意地,同时也是唯一地归入 $K_1(\omega)$ 或是 $K_2(\omega)$ 后,对定理1的应用无影响.但如果 $K_1(\omega)$ 或 $K_1(\omega)$ 出现了空集情况,应将 $I_i(\omega)=0$ 归入空集中,按没有空集的情况来计算 $F(\omega)$.

说明3　若有某个端点多项式在原点取值,则可以断定 P 不是D鲁棒稳定的,所以在(11)式中直接令 $F(\omega)=0$.

说明4　定理2是判定某个取定的 ω 处 $F(\omega)$ 大于零的充分条件,$K_1(\omega)$ 和 $K_2(\omega)$ 任何一个为空集都表明满足了定理2,所以在(11)式中令 $F(\omega)=M$,M 为任意一个大于0的实数,定理2可以用来减少计算量,或者用于对多面体多项式族的D鲁棒稳定性作粗略的判定.

说明5　本文方法与Barmish方法[4]相比,计算量要小得多.具体地说,假定多项式族 P 有 $l=8$ 个端点多项式,对于每个 ω 计算点,$F(\omega)$ 除了需要计算8个端点多项式的实部和虚部值之外,最多还需要再做8次除法,2次减法,就可以得到 $F(\omega)$ 的值了.而Barmish方法同样先要计算8个端点多项式的实部和虚部值.另外,若将其附加的扫描参数 $\rho\in[0,1]$ 分成100个点搜索计算的话,则还要再做800次线性函数的求值计算,才能得到其测试函数 $H(\omega)$ 的值,这比起本文方法来,计算量要多出数十倍.

5　应用举例

下面举一个简单的例子来说明本文方法的应用,考虑如下摄动多项式

$$p(s,q)=s^3+(10+q_2)s^2+(29+q_1)s+(30+q_1+q_2). \tag{13}$$

已知 $q_1\in[-5,\ 5]$,　$q_2\in[-4,\ 4]$.

指定D域为 $\mathrm{Re}(s)\leqslant-1.5$ 的左半复平面,试判定此摄动多项式的D鲁棒稳定性.

分析可知,当 $q_1=q_2=0$ 时,该三阶多项式的三个零点分别为 $s_1=-6,s_{2,3}=-2\pm j$,即此多项式是D稳定的,满足“至少有一个D的多项式”这一条件.又因为这是首一多项

式，满足“所有多项式都有相同阶数”这一补充条件，故应用本文定理的条件是符合的，下面求解D鲁棒稳定性测试函数 $F(\omega)$.

1) 确定 l 个端点多项式

这里摄动参数共有2个，即 $m=2$，则共有 $l=2^m=4$ 个端点多项式，分别将如下4个端点

$$q^1=[-5 \quad -4]^{\mathrm{T}},\quad q^2=[-5 \quad 4]^{\mathrm{T}},$$
$$q^3=[5 \quad -4]^{\mathrm{T}},\quad q^4=[5 \quad 4]^{\mathrm{T}}$$

代入(13)式，得到4个端点多项式如下：

$$p_1(s)=s^3+6s^2+24s+21,$$
$$p_2(s)=s^3+14s^2+24s+29,$$
$$p_3(s)=s^3+6s^2+34s+31,$$
$$p_4(s)=s^3+14s^2+34s+39.$$

2)确定 $\Phi_{\mathrm{D}}(\omega)$

对于本例指定的D域，可取

$$\Phi_{\mathrm{D}}(\omega)=-1.5+j\omega.$$

经计算机求解，图1是计算所得的图形，图中有一段平直曲线，表示 ω 在此范围内已满足定理2，简单地令 $F(\omega)=10$（一个大于0的正数，这里为了图形显示方便，没有取太大的正数）. 在 $\omega=1.2$ 附近，$F(\omega)<0$，在图上看不清楚，从计算数据可知，$F(1.22)\doteq-0.068$，由定理1可判定此摄动多项式族不是D鲁棒稳定的. 用Barmish的方法也可得到相同的结论.

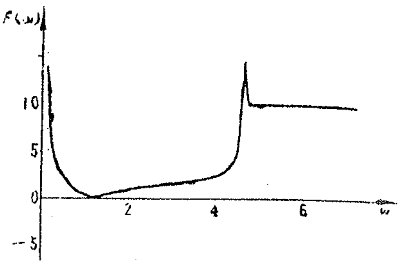


图1 D鲁棒稳定性测试曲线

6 结 论

由于有人证明了多面体多项式族不能用“所有端点多项式都是D稳定的”来推断整个多项式族的D鲁棒稳定性，使得人们不能简单地将Kharitonov的4-多项式定理推广到一般的情况. 因此出现了各种各样的扩展结果. 通过前面讨论，说明本文提出的方法有明显的优点. 由于允许D域为复平面上任何边界连续的区域，故本文方法既可用于连续系统，又可用于离散系统. 又由于在测试函数 $F(\omega)$ 的构成上，注意到了计算机计算的特点，使得计算机程序的编制十分容易，所以，本文方法更便于应用.

参 考 文 献

[1] Kharitonov, V. L.. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations. Differential'nye Uraveniya, 1978, 14(11):1483—1485

[2] 黄琳，王龙，于年才. 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状与挑战. 控制理论与应用，1991，8(1):11—29

[3] Bartlett, A. C., Hollot, C. V. and Huang, L.. Root Locations for an Entire Polytope of Polynomials: It Suffices to Check the Edges. Math. Contr., Signals., Syst., 1988, 1:61—67

[4] Barmish, B. R.. A Generalization of Kharitonov's Four-Polynomial Concept for Robust Stability Problems with Linearly

Dependent Coefficient Perturbations. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(2):157—164

[5] Petersen, I. R.. A New Extension to Kharitonov's Theorem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(7):825—827

[6] Juang, Y. T.. Comments on "A Generalization of Kharitonov's Four-Polynomial Concept for Robust Stability Problems with Linearly Dependent Coefficient Perturbations". IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35:987—988

[7] Cieslik, J.. On Possilities of the Extension of Kharitonov's Stability Test for Interval Polynomials to Discrete Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32:237—238

附　录

证　首先证明定理1. 对于每个取定的 $\omega\in R$,得到多面体多项式族 P 的一个值域面,记为 $\Omega(\omega)$,在定理1同样的前提条件下,多面体 P 是D鲁棒稳定的充要条件为

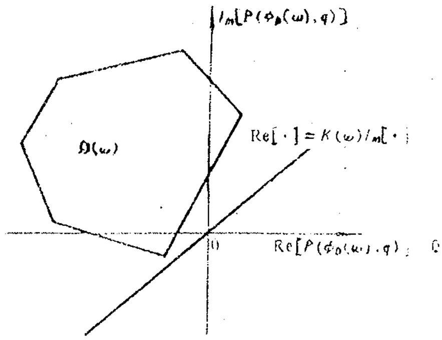
对所有 $\omega\in R$

$$0\notin\Omega(\omega). \tag{A1}$$

这个结论已有证明[4],其基本思路是:因为摄动多项式 $p(s,q)$ 的零点是随 q 的变化连续移动的. 已知存在某个 $q^\circ\in Q$,使得 $p(s,q^\circ)$ 是D稳定的,即 $p(s,q^\circ)$ 的所有零点都在D域之内. 如果这些零点中的某个(或几个)要随着 q 的变化跑到D域之外去,则必定要跨过D域边界. 因此,检验D域边界上有无零点,就可以判定 P 在D域外面有无零点. 为了避免零点由无穷远处绕到D域外面而引起误判的情况,引言中提到的三条补充条件给予了保证[6].

现在,我们只要证明 $0\notin\Omega(\omega)$ 与 $F(\omega)>0$ 等价,定理1就得到了证明. 根据多面体的性质可知,$\Omega(\omega)$ 在复平面上是一个以各个端点多项式的值为顶点的凸多边形[4],由 $\Omega(\omega)$ 的凸性很容易得到下面的证明.

必要性　对某个取定的 $\omega\in R$,若已知 $0\notin\Omega(\omega)$,由 $\Omega(\omega)$ 的凸性可知,必存在一条通过值域平面原点的直线,将值域平面分成两部分,使得 $\Omega(\omega)$ 要么完全位于该直线的上部,要么在该直线的下部,并且 $\Omega(\omega)$ 与该直线无交点,如附图1所示. 如果 $\Omega(\omega)$ 在直线上方,意味着所有端点多项式的取值都满足



附图1　值域断面与D鲁棒稳定性的关系

$$R_i(\omega)<K(\omega)I_i(\omega),\quad i=1,2,\cdots,l. \tag{A2}$$

其中 $K(\omega)$ 是上述过原点直线斜率的倒数. 由(A2)式知,$K(\omega)$ 必满足如下联立不等式

$$\begin{cases} K(\omega)>R_i(\omega)/I_i(\omega), & I_i(\omega)>0, \\ K(\omega)<R_i(\omega)/I_i(\omega), & I_i(\omega)<0, \end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,l,$$

这意味着

$$\max K_1(\omega)<K(\omega)<\min K_2(\omega).$$

因为 $K(\omega)$ 存在,则必有

$$\min K_2(\omega)-\max K_1(\omega)=F_2(\omega)>0.$$

同理,若 $\Omega(\omega)$ 在直线的下方,则可推出 $F_1(\omega)>0$,又因为 $\Omega(\omega)$ 与过原点的直线无交点,故 $F(\omega)$ 要么等于 M,要么等于 $\max\{F_1(\omega),F_2(\omega)\}$,因此,只要 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 任意一个大于0,或者 $K_1(\omega)$,$K_2(\omega)$ 任意一个为空集,都能得到 $F(\omega)>0$,即由 $0\notin\Omega(\omega)$ 可以推出 $F(\omega)>0$,必要性得证.

充分性　假定 $F(\omega)>0$,有两种可能:一种是 $K_1(\omega)$ 或 $K_2(\omega)$ 为空集. 由 $\Omega(\omega)$ 的凸性可知,这意味着 $\Omega(\omega)$ 要么在下半值域平面,要么在上半值域平面,并且由说明2可知,在实轴上没有 $\Omega(\omega)$ 的端点,所以有 $0\notin\Omega(\omega)$. 另一种可能是 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 中必有一个大于0,不防设 $F_1(\omega)>0$ 成立,则有

$$\min K_1(\omega)-\max K_2(\omega)>0.$$

这表明在开区间$(\max K_2(\omega),\min K_1(\omega))$中任取一个实数作为$K(\omega)$值，都能满足下面不等式

$$R_i(\omega)>K(\omega)I_i(\omega),\quad i=1,2,\cdots,l,\tag{A3}$$

这意味着$\Omega(\omega)$的所有端点都位于一条经原点直线的下方，又由$\Omega(\omega)$的凸性可知，$\Omega(\omega)$必然整个位于该直线的下方，且与该直线无交点，于是由$F_1(\omega)>0$推出了$0\notin\Omega(\omega)$. 同理，若$F_2(\omega)>0$成立，也能推出$0\notin\Omega(\omega)$，充分性得证. 至此，定理1的整个证明就完成了.

定理2的证明比较简单，如果$R_i(\omega)$和$I_i(\omega)$任何一个正定(或负定)，就表明$\Omega(\omega)$必在值域平面上的某个半平面内. 例如$R_i(\omega)$正定，$\Omega(\omega)$就在右半平面；$I_i(\omega)$正定，$\Omega(\omega)$在上半平面，都说明$0\notin\Omega(\omega)$. 但由$0\notin\Omega(\omega)$不能反推出$R_i(\omega)$或$I_i(\omega)$是正定(或负定)的，所以定理2是任一固定的ω处$F(\omega)>0$的充分条件，而$F(\omega)$表达式中$K_1(\omega)$或$K_2(\omega)$为空集也就表明满足了定理2，故简单地令$F(\omega)=M>0$即可.

Analysis of the D Robust Stability of a Class of Polynomial Family

TANG Jianguo

(Department of Electrical Engineering, Sichuan Institute of Light Industry and Chemical Technology · Zigong, 643033, PRC)

HUANG Jiaying

(Chengdu University of Science and Technology · Sichuang, 610065, PRC)

Abstract: This paper proposes a new technique for analysis of the D robust stability of a polynomial family. This mehtod is much more easy for understanding and application than others and can be suitable to any D region in the complex plane which has a continuous boundary. This naturally gives rise to the development of extension of Kharitonov's theorem.

Key words: polynomial family; D robust stability; testing function

本文作者简介

唐建国 1954年生. 1982年于浙江大学化工系获学士学位；1991年于成都科技大学自动控制系获硕士学位. 现任四川轻化工学院电子系讲师. 研究兴趣和领域为不确定性系统的分析和设计，过程控制等. 目前主要研究系统的鲁棒性.

黄家英 1936年生. 1958年毕业于浙江大学. 毕业后在成都科技大学长期从事自动化系统与控制理论的教学和科研工作. 主要研究方向是经典控制理论与现代控制理论的有机结合问题，鲁棒性分析以及不确定性系统的控制等课题.