第9卷第5期
1992年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 5
Oct., 1992

具有不确定动态线性系统的鲁棒状态估计*

陈文华
(南京航空学院自动控制系,210016)
顾兴源
(东北工学院自动控制系·沈阳,110006)
袁　信
(南京航空学院自动控制系,210016)

摘要: 本文研究了一类具有参数和噪声特性不确定线性系统的鲁棒状态估计问题. 利用对策论思想,定义了能使不确定下最坏性能最好的极小极大鲁棒状态估计器,提出了一种简单的近似设计方法,即设计最坏对象的最优滤波器. 给出了这种设计方法设计滤波器导致的性能误差边界,进一步指出当满足文中给出的鞍点条件时,最坏对象的最优滤波器就是极小极大鲁棒滤波器.

关键词: 状态估计; 鲁棒性; 对策论

1 前　言

一般在进行状态估计器设计时,总是假设系统的参数和噪声统计特性是精确已知的,但由于实际对象和设计模型的差异,或由于实际对象本身的不确定性,导致了系统不确定的存在,因而滤波器的鲁棒性是十分重要的,特别在大范围的不确定下必须进行鲁棒设计. [1～4]中利用对策论对具有不确定加噪声的系统进行了研究,给出了鞍点存在的充要条件,[5]中对不确定噪声以乘积方式扰动系统的情况进行了研究. 到目前为止具有不确定参数系统的鲁棒滤波研究结果很少,[6]中考虑了具有不确定动态(包括不确定参数和噪声)的情况,但设计方法很复杂. 本文研究在不确定参数和噪声统计特性下的系统鲁棒滤波器设计问题. 其基本思想是使不确定下的最坏性能最小,从而保证状态估计器的性能鲁棒性. 文中提出了一种近似设计方法,给出了鞍点存在的充要条件.

2 问题的描述

考虑以下不确定线性系统

$$\dot{X}(t) = A(\theta)X(t) + \xi(t), \tag{2.1}$$

$$Y(t) = C(\theta)X(t) + \eta(t). \tag{2.2}$$

这里 $X\in R^n, Y\in R^m, \xi\in R^n, \eta\in R^m, A\in R^{n\times n}, C\in R^{m\times n}$,且假设 $\xi(t),\eta(t)$ 为平稳高斯白噪声,具有以下性质:

$$E[\xi(t)] = E[\eta(t)] = 0,$$
$$\mathrm{cov}[\xi(t),\xi(\tau)] = F\delta(t-\tau), \quad F\geqslant 0,$$
$$\mathrm{cov}[\eta(t),\eta(\tau)] = L\delta(t-\tau), \quad L\geqslant 0,$$

---

* 国家航空科学基金资助项目.
本文于1991年7月13日收到. 1991年10月10日收到修改稿.

$$\mathrm{cov}[\xi(t),\eta(t)] = 0.$$

设系统的不确定参数和噪声特性满足以下条件：

1) θ 属于给定的凸闭集 D，且 θ 为常数；

2) 对于所有的 $\theta \in D$，$[A(\theta),C(\theta)]$ 可观测；

3) 噪声的方差是不确定常数，但属于以下集合

$$S_\xi = \{F: \| F - F_0 \| \leqslant f_1,\ F \geqslant 0\}, \tag{2.3}$$

$$S_\eta = \{L: \| L - L_0 \| \leqslant l_1,\ L \geqslant 0\}. \tag{2.4}$$

这里 F_0, L_0, f_1, l_1 均已知.

采用以下状态估计器

$$\dot{\hat{X}}(t) = A_0\hat{X}(t) + K[Y(t) - C_0\hat{X}(t)]. \tag{2.5}$$

其中 $A_0 \in R^{n\times n}, C_0 \in R^{m\times n}, K \in R^{n\times m}, \hat{X} \in R^n$ 为状态 X 的估计值.

滤波性能指标取为

$$J = E[(X - \hat{X})^{\mathrm{T}} R (X - \hat{X})]. \tag{2.6}$$

这里 $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ 为加权阵.

取 $\tilde{X} = X - \hat{X}$，则由状态估计器与对象构成的系统状态方程为

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}W. \tag{2.7}$$

这里

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \end{bmatrix},\quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - A_0 - K(C - C_0) & A_0 - KC_0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K \end{bmatrix},\quad W = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}.$$

性能指标(2.6)可写成

$$J = \mathrm{tr}\bar{R}M. \tag{2.8}$$

其中

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},\quad M = E[\bar{X} \quad \bar{X}^{\mathrm{T}}].$$

尽管 $\bar{X}$ 是非零均值，利用[8]中的结论同样可以推出以下定理.

定理 2.1 对于系统(2.7)，其稳态性能指标(2.6)可写成(2.8)，其中 M 满足以下方程

$$M\bar{A}^{\mathrm{T}} + \bar{A}M + \bar{B}H\bar{B}^{\mathrm{T}} = 0. \tag{2.9}$$

其中 $H = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$.

本文的设计目标为极小化在不确定下的最坏性能，即求解以下问题

$$z_1 = \min_E \max_P J(E,P) = \max_P J(E',P), \tag{2.10}$$

约束为(2.9)，这里

$$E \triangleq (K, A_0, C_0),\quad P \triangleq (A, C, F, L)$$

分别表示具有结构如(2.5)的滤波器和由系统(2.1)，(2.2)描述的对象. 这就意味着寻找滤波器 E' 使得在不确定下的最坏滤波性能最小，从而尽量减少不确定对滤波性能的最坏

影响.

下列最优滤波理论结果将在后面用到.

当 A,C,F,L 精确已知时,最优滤波问题

$$\min J \tag{2.11}$$

的稳态解为(2.5),其中

$$K=\Sigma C^{\mathrm{T}}L^{-1}, \tag{2.12}$$

$$A\Sigma+\Sigma A^{\mathrm{T}}+F-\Sigma C^{\mathrm{T}}L^{-1}C\Sigma=0. \tag{2.13}$$

3 极小极大问题的求解

事实上问题(2.10)是一个二人零和对策问题,直接求解该极小极大问题比较复杂,现定义以下辅助问题

$$z_2=\max_P \min_E J(E,P). \tag{3.1}$$

问题(3.1)是问题(2.10)的对偶问题,对于一般的对策问题,解这两个问题的复杂程度差不多,但对于鲁棒状态估计问题,由于可以借用最优滤波中的结果,问题(3.1)比问题(2.10)大为简单.

利用上节中给出的最优滤波理论结果,问题(3.1)可写成

$$z_2=\max_P J^*(P)=\max \operatorname{tr}RM_3, \tag{3.2}$$

约束为

$$M_3A^{\mathrm{T}}+AM_3+F-M_3C^{\mathrm{T}}L^{-1}CM_3=0, \tag{3.3}$$

这里注意到在最优滤波中 $A_0=A,C_0=C$,且取

$$M=\begin{bmatrix}M_1 & M_2\\ M_2^{\mathrm{T}} & M_3\end{bmatrix},$$

展开(2.9)式得到上述结果.

上述问题比原问题简单多了,这是一个一般的优化问题,而且矩阵维数仅为 n,而原问题(2.10)是一个极小极大问题,且矩阵维数为 $2n$.

本文提出的近似设计方法为通过求解(3.2)得到最坏对象 P^*,再由(2.4),(2.12),(2.13)得到对应于 P^* 的最优滤波器 E^*.用设计出的最坏对象的最优滤波器代替极小极大鲁棒滤波器 E'.下面一节将研究这二者之间的关系.

4 鞍点存在的条件及性能误差的估计

在许多情况下,由求解(2.10)得到的滤波器 E^* 与求解极小极大问题得到的滤波器 E' 是不等的,本节将给出这二者等价的条件及该条件不满足时,二者的性能差别.先给出一些必要的预备知识.

引理 4.1[7] 问题(3.1)与问题(2.11)解等价的充分必要条件为

$$J(E^*,P)\leqslant J(E^*,P^*)\leqslant J(E,P^*), \tag{4.1}$$

这里 (E^*,P^*) 称为对策鞍点.

引理 4.2[2] 对于不确定噪声特性满足假设 3)的系统(2.1),(2.2),鞍点 (K^*,F^*,L^*) 一定存在,且

$$F^*=F_0+f_1I,\quad L^*=L_0+l_1I, \tag{4.2}$$

K^*为对应于(F^*,L^*)的 Kalman-Bucy 滤波器增益,状态估计器形如(2.5).

定理 4.1 求解极小极大问题(2.11)与求解极大极小问题(3.1)所得的滤波器是相同的当且仅当对于所有的(A,C)

$$J(E^*,P_c)\leqslant J(E^*,P^*) \tag{4.3}$$

成立,其中$P_c=(A,C,F_0+f_1I,L_0+l_1I)$,$P^*$由解(3.2)式给出,$E^*$为对应于$P^*$的最优滤波器.

证 由于E^*为对象P^*最优滤波器的充要条件为对于所有的E,

$$J(E^*,P^*)\leqslant J(E,P^*)$$

成立,因此鞍点条件(4.1)中的右不等式得到满足.

再由引理 4.2 知,满足假设 3)系统的鞍点一定存在且为(4.2)式所给出,因此鞍点条件(4.1)中的左不等式得到满足当且仅当(4.3)式成立. 再由引理 4.1 可得该定理. 证毕.

定理 4.2 设存在一个常数$a\geqslant 0$,使得对于所有的$P_c=(A,C,F_0+f_1I,L_0+l_1I)$,

$$-a+J(E^*,P_c)\leqslant J(E^*,P^*) \tag{4.4}$$

成立,那么由解(3.1)所得滤波器E^*的最坏性能与求解(2.10)所得的极小极大鲁棒滤波器E'的最坏性能之差不超过a. 特别是当$a=0$时,(4.4)为二者等价的充要条件.

证 由(4.4)可得

$$-a+\max_{P_c}J(E^*,P_c)\leqslant J(E^*,P^*). \tag{4.5}$$

再注意到引理 4.2,(4.5)式可写成

$$-a+\max_{P}(E^*,P)\leqslant J(E^*,P^*). \tag{4.6}$$

由于E^*为P^*的最优滤波器,故对于任意E

$$J(E^*,P^*)\leqslant J(E,P^*).$$

即

$$J(E^*,P^*)\leqslant \min_{E}J(E,P^*). \tag{4.7}$$

再由[7]中得以下不等式

$$\min_{E}J(E,P^*)\leqslant \max_{P}\min_{E}J(E,P),$$

$$\max_{P}\min_{E}J(E,P^*)\leqslant \min_{E}\max_{P}J(E,P).$$

利用以上二式,再由(4.7),(4.6)式得

$$-a+\max_{P}J(E^*,P)\leqslant \min_{P}\max_{E}J(E,P).$$

注意到(2.10)式中E'的定义

$$\max_{P}J(E^*,P)\leqslant a+\max_{P}J(E',P).$$

因此定理中的第一部分得证. 第二部分证明类似于定理 4.1 的证明,这里略去. 证毕.

定理 4.2 中的a可通过求解以下问题得到

$$a=\max_{P_c}J(E^*,P_c)-J(E^*,P^*). \tag{4.8}$$

定理 4.1 给出了最坏对象的最优滤波器E^*与极小极大鲁棒滤波器E'等价的充要条件. 值得指出的是,[2]中指出当噪声不确定方差属于一个凸闭集时,鞍点总是存在. 而不

确定参数不同于不确定噪声，定理 2.1 中的条件并不是总能满足的，即鞍点不一定存在．定理 4.2 给出了这二者之间的性能误差．这样就完整地建立了最坏对象的最优滤波器和极小极大鲁棒滤波器之间的关系．

5 例　子

考虑以下不确定系统

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} X + \xi,$$

$$Y = [0 \quad b] X + \eta.$$

其中

$$0.5 \leqslant b \leqslant 1, \quad 1 \leqslant a_i \leqslant 2, \quad i = 1,2,$$

$$S_\xi = \{F : \| F - F_0 \| \leqslant f_1, F \geqslant 0\}, \quad F_0 = 0.75I, f_1 = 0.25,$$

$$S_\eta = \{L : \| L - L_0 \| \leqslant l_1, L \geqslant 0\}, \quad L_0 = 0.75, l_1 = 0.25,$$

$$R = I.$$

试图设计极小极大鲁棒状态估计器，它能尽量减少不确定性对性能的最坏影响．

先解(3.2)，(3.3)得

$$F^* = I, \quad L^* = 1,$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.236 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C^* = [0 \quad 0.5], \quad M_\xi^* = \begin{bmatrix} 0.47214 & 0 \\ 0 & 0.47214 \end{bmatrix}.$$

故

$$J^* = \mathrm{tr} R M_\xi^* = 0.94428.$$

最坏对象的最优估计器为

$$\dot{\hat{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \hat{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.236 \end{bmatrix} [Y(t) - [0 \quad 0.5] \hat{X}(t)]. \tag{5.1}$$

由于

$$\max_{P_c} J(E^*, P_c) = 0.94428,$$

由(4.8)得 $\alpha=0$.

因此极小极大鲁棒滤波器 E' 就是(5.1)给出的最坏对象的最优滤波器 E^*，且采用该滤波器后在不确定下的最坏性能为 0.94428.

6 结　论

本文给出了不确定参数和噪声特性下系统的鲁棒滤波器设计方法，建立了鞍点存在的充要条件．文中的结果表明，从滤波器的性能鲁棒性考虑，人们在设计中常用的基于最坏情况设计的思想具有一定的优越性，而且当文中给出的鞍点条件得到满足时，这样设计得到的滤波器就是极小极大鲁棒滤波器．但同时也表明当鞍点不存在时，这种设计思想不能保证有最好的鲁棒性，文中给出了二者之间的性能差别，因此本文的结果对鲁棒滤波器的设计有一定的参考价值．

参考文献

[1] D'Appolito, J. A. and Charles, E. H.. A Minmax Approach to Design of Low Sensitivity State Estimators. Automatica, 1972, 8:599—608

[2] Poor, V. N. and Looze, D. P.. Minimax State Estimation for Linear Stochastic Systems with Noise Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(6):902—904

[3] Darragh, J. C. and Looze, D. P.. Noncausal Minimax Linear State Estimation for Systems with Uncertain Second-order Statistics. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29:557—559

[4] Verdu, S. and Poor, H. V.. Minimax Linear Observers and Regulators for Stochastic Systems with Uncertain Second-Order Statistics. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29:499—510

[5] Phillips, Y. A.. Estimation and Control of Systems with Unknown Covariance and Multiplicative Noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34:1075—1078

[6] Martin, C. J. and Mintz, M.. Robust Filtering and Prediction for Linear Systems with Uncertain Dynamics: A Game-Theoretic Approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1983, AC-28:888—896

[7] Basar, T. and Olster, G. J.. Dynamic Noncooperative Game Theory. Academic Press, New York, 1982

[8] Meditch, J. S.. 随机最优线性估计与控制. 哈尔滨:黑龙江人民出版社,1984

Robust State Estimation for Linear Systems with Uncertain Dynamics

CHEN Wenhua and YUAN Xin

(Department of Automatic Control, Nanjing Aeronautical Institute·Nanjing, 210016, PRC)

GU Xingyuan

(Department of Automatic Control, Northeast University of Technology·Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: The problem of robust state estimation for linear systems with uncertain parameters and noise is considered in this paper. The robust state estimator which can minimize the worst performance under the uncertainties is designed by an approximate method. Moreover, the error bound of this method is given. In particular, it is shown that, under some condition, the estimator obtained by this approximate method is the same as that by the exact method.

Key words: state estimation; robustness; game theory

本文作者简介

陈文华 1965年生. 1986年毕业于江苏工学院,同年考入东北工学院自动控制系,1991年8月提前获得博士学位. 现在南京航空学院自动控制系任教. 目前主要研究兴趣为鲁棒控制,容错控制和智能控制的理论及应用,特别是在导航系统中的应用.

顾兴源 1928年生. 1951年清华大学电机系毕业,1961年至1963年莫斯科动力学院访问学者,现为东北工学院自动控制系教授,博士生导师,研究方向为系统辨识,自适应控制和鲁棒控制.

袁 信 1929年生. 教授. 博士生导师. 1953年毕业于山东工业大学电机系,从1953年到现在在南京航空学院从事航空仪表,飞行器导航与控制方面的教学和科研工作. 主要的研究领域是惯性导航与组合导航.