第9卷第5期
1992年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 5
Oct., 1992

# 改进的$H_\infty$-最佳灵敏度的连续性*

陈亚陵
(厦门大学系统科学系,361005)

**摘要**: 为克服灵敏度及其加权型极小问题的局限性,本文采用改进形式,即所谓改进的灵敏度极小问题. 它允许原系统对象是严格真有理,同时反馈补偿器是真有理传递函数. 证明其极小值的存在性和具备连续性. 结果表明所采用的性能指标具有适定性.

**关键词**: $H_\infty$-设计; 最佳灵敏度; 改进参数; 连续性; 适定性

## 1 前 言

Zames[1]指出反馈系统最佳设计的许多问题能够归结为灵敏度极小化的计算. 在[2]中讨论了类似的问题. 它们都是应用$H_\infty$-范数极小化的方法. 几年来,$H_\infty$-范数及其加权形式的设计方法已经取得丰硕的成果,但是仍然存在局限性,表现在:1) 如果对象传递函数是严格真有理,通过分析接近"∞"点的性态表明,其灵敏度函数的$H_\infty$-范数的下确界不可能达到. 为克服这一缺陷,通常采用加权形式. 2) 正如[3]指出的,如果对象传递函数是严格真,则稳定化补偿器必然是真有理. [4]指出若以真有理函数作补偿器时,其加权型极小问题不可能实现,只有当加权函数满足某些条件时,才能构造容许反馈序列进行逼近. 由于结果对加权函数明显依赖性,虽然是最优设计,则与经典设计方法差别不大.

针对上述存在问题,本文引入改进的灵敏度作为新的性能指标. 在此指标中,同时允许原对象传递函数是严格真有理,和反馈补偿器是真有理函数. 证明改进的灵敏度的下确界能够达到,解决了极小值存在性问题. 最后证明该性能度量的连续性,结果表明该指标具有适定性.

## 2 问题的阐述

本文考虑单输入单输出时不变线性系统的$H_\infty$-最佳灵敏度问题. 设$P$为对象传递函数,$C$为补偿器,使闭环系统达到内部稳定的真有理补偿器$C$能参数化. 让$P$是严格真有理函数,和$P=A/B$,其中$A,B\in RH_\infty$是互素因子,$RH_\infty$是由Hardy空间$H_\infty$中的实有理函数全体组成. 选择$Q_0,Q_2\in RH_\infty$,使

$$AQ_0+BQ_2=1, \tag{1}$$

则组成稳定闭环系统$(P,C)$的所有反馈补偿器$C$的$Q$-参数化形式为

$$C=Q(1-PQ)^{-1}, \tag{2}$$

$$Q=BQ_0+B^2Q_1,\quad Q_1\in RH_\infty. \tag{3}$$

设$P$在虚轴上没有极点,则$P$的分母因子$B$能够取有限Blaschke乘积$B_P$,即

---

* 中国科学院自动化所复杂系统控制开放实验室基金赞助课题.

本文于1991年1月8日收到. 1991年10月4日收到修改稿.

$$B = B_P := \prod_i (a_i - s)/(\bar{a}_i + s), \tag{4}$$

其中$\{a_i; i=1,2,\cdots,q\}$是$P$的开右半平面极点. 让$P$的分子因子$A := B_P P$. 设$P$的开右半平面零点为$\{b_j; j=1,2,\cdots,r\}$,相应的有限 Blaschke 乘积为

$$B_z(s) := \prod_j (b_j - s)/(\bar{b}_j + s). \tag{5}$$

通常灵敏度极小问题为

$$\mu(P) := \inf\{\|(1+PC)^{-1}\|_\infty : C \in S(P)\}. \tag{6}$$

其中$S(P)$表示使闭环系统$(P,C)$稳定的所有实有理函数组成的补偿器集合. 应用式(1)～(3),式(6)能够简化为参数化形式

$$\begin{aligned}\mu(P) &= \inf\|B(Q_2 - AQ_1)\|_\infty \\ &= \inf\{\|Q_2 - AQ_1\|_\infty : Q_1 \in RH_\infty\} =: \mu(A).\end{aligned} \tag{7}$$

其中$|B(j\omega)| = |B_P(j\omega)| = 1$. 我们要考虑的问题是$P$的摄动(这里实际上是$A$的摄动)对$\mu(A)$的影响,特别是映射$: A \to \mu(A)$是否连续. 因为$A \in RH_\infty \subset H_\infty$,我们有一个以$H_\infty$-范数定义的自然拓扑,所以要探讨的问题为,$\|A_i - A\|_\infty \to 0$是否意味着$\mu(A_i) \to \mu(A)$? 答案在一般情况下是否定的.

## 3 改进的灵敏度极小问题的存在与连续性

本节对灵敏度指标(7)加以改进,使它具有下面所要讨论的性质. 为此,考虑改进的灵敏度极小问题

$$\mu_\varepsilon(A) := \inf\{\|Q_2 - (A + \varepsilon B_z)Q_1\|_\infty : Q_1 \in RH_\infty\}. \tag{8}$$

其中参数$\varepsilon > 0$,$B_z$由式(5)定义. 由[4]能分解$A = A_0 B_z$,其中$A_0$是外函数,$B_z$内函数. 以此代入式(8),得改进的极小灵敏度为

$$\mu_\varepsilon(A) := \inf\{\|Q_2 - (A_0 + \varepsilon)B_z Q_1\|_\infty : Q_1 \in RH_\infty\}, \quad \varepsilon > 0. \tag{9}$$

**定义 1** 如果$\varepsilon \in U$,其中$U$规定为

$$U := \{\varepsilon > 0 : A_0(s) + \varepsilon = 0 \text{ 的全部根在开左半平面}\}. \tag{10}$$

则称$\varepsilon$满足$A_0 + \varepsilon$在$\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$的可逆性条件. 简称可逆性条件.

**定理 1** 如果$\varepsilon$满足可逆性条件(10),则由式(9)定义的指标能简化为

$$\mu_\varepsilon(A) = \inf\{\|Q_2 - B_z\tilde{Q}\|_\infty : \tilde{Q} \in RH_\infty\} =: J(\tilde{Q}). \tag{11}$$

其中$\tilde{Q} = (A_0 + \varepsilon)Q_1$;而且此下确界能够达到.

证 因为$\varepsilon$满足可逆性条件(10),从而能够定义$\tilde{Q} = (A_0 + \varepsilon)Q_1 \in RH_\infty$($RH_\infty$是欧氏整环). 推得第一个结论是正确的. 其次,以空间$H_\infty$取代$RH_\infty$,式(11)的下确界不再减少,因此式(11)为

$$J(\tilde{Q}) = \inf\{\|Q_2 - B_z\tilde{Q}\|_\infty : \tilde{Q} \in RH_\infty\}. \tag{12}$$

这是一个典型的最优化问题,因为$B_z$在$j\omega$轴上没有零点,所以下确界能达到. 其极小解能由[4]Sarason 定理求得. 证毕

现在把改进的极小灵敏度(9)记为

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{A}) := \mu_\varepsilon(A) &= \inf\{\|Q_2 - (A_0 + \varepsilon)B_z Q_1\|_\infty : Q_1 \in H_\infty\} \\ &= \inf\{\|Q_2 - \tilde{A}Q_1\|_\infty : Q_1 \in H_\infty\}.\end{aligned} \tag{13}$$

其中$\tilde{A} = (A_0 + \varepsilon)B_z$和$\varepsilon$满足可逆性条件(10).

现在证明 $\mu(\tilde{A})$的连续性. 首先证明 $\mu(\tilde{A})$的上半连续性.

**引理 1** 如果 $\tilde{A}_i,\tilde{A}\in RH_\infty$和 $\|\tilde{A}_i-\tilde{A}\|_\infty\to 0\ (i\to\infty)$,则

$$\limsup_i \mu(\tilde{A}_i)\leqslant \mu(\tilde{A}).$$

**证** 因为

$$\begin{aligned}\limsup_i \mu(\tilde{A}_i) &=\limsup_i \inf_{Q_1\in H_\infty}\|Q_2-\tilde{A}_iQ_1\|_\infty\\ &\leqslant \limsup_i \|Q_2-\tilde{A}_i\hat{Q}_1\|_\infty,\quad \forall\,\hat{Q}_1\in H_\infty\\ &=\|Q_2-\tilde{A}\hat{Q}_1\|_\infty,\quad \forall\,\hat{Q}_1\in H_\infty.\end{aligned}$$

所以对不等式右边关于 $\hat{Q}_1$ 取下确界,即证得下半连续性. 证毕

**定理 2** 由式(13)定义的灵敏度 $\mu(\cdot)$关于 $\tilde{A}$ 是连续的.

**证** 由引理 1 知道已具备上半连续性. 下面证明下半连续性. 根据 $|B_z(j\omega)|=1$,和 $\varepsilon$ 满足条件(10),则有

$$\begin{aligned}d:&=\inf_{\omega\in R}|\tilde{A}(j\omega)|=\inf_{\omega\in R}|(A_0+\varepsilon)B_j(j\omega)|\\ &=\inf_{\omega\in R}|A_0(j\omega)+\varepsilon|>0.\end{aligned}$$

并选择 $n$,使不等式 $\|\tilde{A}_i-\tilde{A}\|_\infty<d/2$ 对所有的 $i\geqslant n$ 成立. 其次,存在 $m\geqslant n$,使不等式 $\|Q_2-\tilde{A}_mQ_1\|_\infty\leqslant\mu(\tilde{A})+1$ 成立. 则 $|\tilde{A}_n(j\omega)|>d/2$ 对 $\omega\in R$ 成立,且导出 $\|\tilde{A}_mQ_1\|_\infty$的界为

$$\begin{aligned}\frac{d}{2}\|Q_1\|_\infty\leqslant\|\tilde{A}_mQ_1\|_\infty&=\|Q_2-Q_2+\tilde{A}_mQ_1\|_\infty\\ &\leqslant\|Q_2\|_\infty+\|Q_2-\tilde{A}_mQ_1\|_\infty\\ &\leqslant\|Q_2\|_\infty+\mu(\tilde{A})+1=:h.\end{aligned}$$

即推得 $\|Q_1\|_\infty\leqslant 2h/d$. 现在对任意的 $i\geqslant n$,考察

$$\begin{aligned}\|Q_2-\tilde{A}_iQ_1\|_\infty&\geqslant\|Q_2-\tilde{A}Q_1\|_\infty-\|\tilde{A}Q_1-\tilde{A}_iQ_1\|_\infty\\ &\geqslant\|Q_2-\tilde{A}Q_1\|_\infty-\|\tilde{A}-\tilde{A}_i\|_\infty\|Q_1\|_\infty\\ &\geqslant\|Q_2-\tilde{A}Q_1\|_\infty-\|\tilde{A}-\tilde{A}_i\|_\infty 2h/d.\end{aligned}$$

由此推得下半连续性

$$\liminf_i \mu(\tilde{A}_i)\geqslant\mu(\tilde{A}).$$

最后,联合上、下半连续性的结果,得

$$\mu(\tilde{A}_i)\to\mu(\tilde{A}),\quad (i\to\infty).$$

即证明了连续性. 证毕

**注 1** 因为 $A_0(s)+\varepsilon\neq 0$ 在闭右半平面成立的一个充分条件是 $\varepsilon>\|A_0\|_\infty$. 因此,为满足条件(10),在某些具体问题上 $\varepsilon$ 的取值不可能太小,这时如果对原对象采用性能指标(9),则所得的解不可能视为原性能指标解的近似.

**注 2** 对于改进型指标(9),若放入加权函数,显然此时对加权函数的限制可以放宽.

## 参 考 文 献

[1] Zames, G.. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Mulitiplication Seminorms, and Approximate Inverse. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(2):301—320

[2] Zames, G. and Frances, B. A.. Feedback Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness. IEEE Trans. Automat. Contr., 1983, AC-28(5):585—601

[3] Vidyasagar, M.. Control System Synthesis: A Factorization Approach. The MIT Press, Cambridge, MA., 1985

[4] Francis, B. A. and Zames, G.. On $H^\infty$-Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29(1):9—16

[5] Freudenberg, J. S. and Looze, F. P.. An Analysis of $H^\infty$-Optimization Design Methods. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(3):194—200

# The Continuity of the Modified $H_\infty$-Optimal Sensitivity

CHEN Yaling

(Department of System Science, Xiamen University · Xiamen, 361005, PRC)

**Abstract**: In this paper we consider the properties of the modified $H_\infty$ optimal sensitivity, which applies to a strictly proper plant and a proper feedback compensator. Under some conditions it is show that the infimum in the modified $H_\infty$ optimal sensitivity can be attained and the continuous dependence of the infimum is ensured.

**Key words**: $H_\infty$-design; optimal sensitivity; modified parameters; continuity; well-posedness

## 本文作者简介

**陈亚陵** 1938年生. 1961年6月毕业于厦门大学数学系，留校任教. 1983年为计算机与系统科学系副教授，1988年晋升教授. 从事计算机控制，系统辨识和无穷维系统控制理论等教学与研究工作. 目前兴趣为鲁棒控制与$H_\infty$-系统优化领域的研究工作.