# 状态矩阵中含不确定参数的系统的鲁棒性分析*

胡庭姝 施颂椒
(上海交通大学自动控制系,200030)

**摘要**: 本文研究如下参数不确定系统 $\dot{x}=(A_0+\sum_{i=1}^{m}k_iE_i)x$. 通过将不确定部分的结构对角化,并结合矩阵,行列式的特殊性质,本文导出了具有低保守性的鲁棒性判据. 将本文的方法用于几个典型的例子,与已有的结论相比,可以看到保守性有明显的降低,甚至完全不保守.

**关键词**: 鲁棒性;参数扰动系统;鲁棒稳定上界;对角化

## 1 引 言

本文讨论以下参数不确定系统

$$\dot{x} = (A_0 + E)x. \tag{1}$$

其中 $E=\sum_{i=1}^{m}k_iE_i$, $E_i, A_0\in R^{n\times n}$为常数矩阵,$|k_i|\leqslant\varepsilon$ 为不确定参数.

鲁棒稳定性分析的目的是:寻找一个 $\varepsilon$ 的上界 $\varepsilon^*$,使得我们可以肯定,当 $|k_i|\leqslant\varepsilon^*$ 时,系统(1)都保持为稳定.

这也是[1]~[9]等所讨论的主要问题. [1]~[9]用不同的方法求 $\varepsilon^*$,所得结论的保守性各不相同,但这些结果都是从 Lyapunov 稳定性判据导出的,本文将从状态矩阵的特征值出发,利用根轨迹的连续性,及矩阵行列式的基本性质和特殊变换,导出新的鲁棒性判别方法. 由新方法求出的稳定上界 $\varepsilon^*$,比已有文献中相同例子所得的上界要大.

## 2 鲁棒稳定初步

给定 $m+1$ 个矩阵:$A_0,E_1,E_2,\cdots,E_m\in R^{n\times n}$,其中 $A_0$ 是稳定的,以及一个正数 $\varepsilon$,定义矩阵集合 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A} := \{A\in R^{n\times n} \mid A = A_0 + \sum_{i=1}^{m}k_iE_i, |k_i|\leqslant\varepsilon\}.$$

**定义** 如果 $\mathscr{A}$ 中所有元素 $A$ 都是稳定的,则称 $\mathscr{A}$ 是稳定的.

**定理 2.1** $\mathscr{A}$ 稳定的充要条件是

$$\det[j\omega I - A_0 - \sum_{i=1}^{m}k_iE_i]\neq 0,\quad \forall\ \omega\geqslant 0,\quad |k_i|\leqslant\varepsilon.$$

证 充分性. 以上条件说明 $A_0+\sum_{i=1}^{m}k_iE_i$ 的特征值不会与虚轴相交或接触虚轴. 因为特征值随 $k_i$ 变化是连续的,所以 $A_0+\sum_{i=1}^{m}k_iE_i$ 的特征值将保持在左半复平面内变化,即 $\mathscr{A}$

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1991年1月22日收到. 1991年10月3日收到修改稿.

是稳定的.

必要性　如果存在 $\omega_0$ 和 $k_1,k_2,\cdots k_m$ 使 $|k_i|\leqslant\varepsilon$, $\det[j\omega_0 I-A_0-\sum_{i=1}^{m}k_iE_i]=0$, 则 $A_0+\sum_{i=1}^{m}k_iE_i$ 在 $j\omega_0$ 处有特征值,说明 $\mathscr{A}$ 中有元素不稳定.　　证毕.

**推论 2.1**　如果　1) $\sup\limits_{|k_i|\leqslant\varepsilon}\sup\limits_{\omega}\{\rho[(j\omega I-A_0)^{-1}\sum_{i=1}^{m}k_iE_i]\}<1$,

或　　2) $\sup\limits_{|k_i|\leqslant\varepsilon}\sup\limits_{\omega}\{\bar{\sigma}[(j\omega I-A_0)^{-1}\sum_{i=1}^{m}k_iE_i]\}<1$,

则 $\mathscr{A}$ 稳定.

以上推论难于验证,更进一步地有

**推论 2.2**　如果　1) $\sup\limits_{\omega}\{\bar{\sigma}[(j\omega I-A_0)^{-1}]\}\sup\limits_{|k_i|\leqslant\varepsilon}\bar{\sigma}[\sum_{i=1}^{m}k_iE_i]<1$,

或　　2) $\varepsilon\sup\limits_{\omega}\{\rho[|(j\omega I-A_0)^{-1}|\sum_{i=1}^{m}|E_i|]\}<1$,

则 $\mathscr{A}$ 稳定.

证明推论 2.2 的 2)时,须注意到以下事实:如果 $|A|\leqslant|B|$, 则 $\rho(A)\leqslant\rho(|B|)$. 见[2].

从推论 2.1 到推论 2.2,判别 $\mathscr{A}$ 稳定的条件变得越来越保守,同时也越来越易验证.下节将得到一些易于验证却又不太保守的判据条件.

## 3　不确定结构的对角化及新的判据

设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 的秩分别是 $r_1,r_2,\cdots,r_m$, 则可将 $E_i$ 分解为 $E_i=G_iH_i$, 其中 $G_i\in R^{n\times r_i}$, $H_i\in R^{r_i\times n}$. 这样

$$E=\sum_{i=1}^{m}k_iE_i=\sum_{i=1}^{m}k_iG_iH_i$$

$$=[G_1 \mid G_2 \mid \cdots \mid G_m]\begin{bmatrix}k_1I_{r_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k_2I_{r_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k_mI_{r_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1\\ \hline H_2\\ \hline \vdots\\ \hline H_m\end{bmatrix}.$$

记 $G=[G_1 \mid G_2 \mid \cdots \mid G_m]$, $\Delta=\text{Block diag}[k_1I_{r_1},k_2I_{r_2},\cdots,k_mI_{r_m}]$, $H=[H'_1 \mid H'_2 \mid \cdots \mid H'_m]'$, 则 $E=G\Delta H$. 所谓对角化,就是指将不确定的参数都集中在具有对角形式的 $\Delta$ 中.通过这样分解,可得以下定理.

**定理 3.1**　上节所定义的矩阵集合 $\mathscr{A}$ 稳定的充要条件是

$$\det[I-H(j\omega I-A_0)^{-1}G\Delta]\neq 0,\quad \forall\ \omega\geqslant 0,\quad |k_i|\leqslant\varepsilon.$$

证　对于任意矩阵 $X\in R^{p\times l}$, $Y\in R^{l\times p}$,

$$\det[I_p+XY]=\det[I_l+YX]=\det\begin{bmatrix}I_p & -X\\ Y & I_l\end{bmatrix}.$$

因而

$$\det[I-H(j\omega I-A_0)^{-1}G\Delta]=\det[I-(j\omega I-A_0)^{-1}G\Delta H]$$
$$=\det[I-(j\omega I-A_0)^{-1}\sum_{i=1}^{m}k_iE_i]\neq 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\det[j\omega I-A_0-\sum_{i=1}^{m}k_iE_i]\neq 0.$$

由定理 2.1 便得证.　　证毕.

定理 3.1 的条件难于验证，但可从它得出如下充分判据.

**定理 3.2**　如果 1) $\sup_{\omega}\{\bar{\sigma}[H(j\omega I-A_0)^{-1}G]\}<1/\varepsilon$,

或　2) $\sup_{\omega}\{\rho[|H(j\omega I-A_0)^{-1}G|]\}<1/\varepsilon$.

则 $\mathscr{A}$ 稳定.

证　1) 注意到 $\sup_{|k_i|\leqslant\varepsilon}\bar{\sigma}[\Delta]=\varepsilon$，因而

$$\sup_{|k_i|\leqslant\varepsilon}\sup_{\omega}\bar{\sigma}[H(j\omega I-A_0)^{-1}G\Delta]\leqslant\sup_{\omega}\bar{\sigma}[H(j\omega I-A_0)^{-1}G]\varepsilon<1\quad\Rightarrow$$

$$\det[I-H(j\omega I-A_0)^{-1}G\Delta]\neq 0,\quad\forall\ \omega\geqslant 0,\quad |k_i|\leqslant\varepsilon.$$

由定理 3.1 可知 $\mathscr{A}$ 是稳定的.

2) 注意到，如果 $|k_i|\leqslant\varepsilon$，则 $|\Delta|\leqslant\varepsilon I$. 另外，如果 $|A|\leqslant|B|$，则 $\rho(A)\leqslant\rho(|B|)$. 这样

$$\sup_{|k_i|\leqslant\varepsilon}\sup_{\omega}\rho[H(j\omega I-A_0)^{-1}G\Delta]\leqslant\sup_{\omega}\rho[|H(j\omega I-A_0)^{-1}G|\varepsilon I]<1\quad\Rightarrow$$

$$\det[I-H(j\omega I-A_0)^{-1}G\Delta]\neq 0,\quad\forall\ \omega\geqslant 0,\quad |k_i|\leqslant\varepsilon.$$

同样，由定理 3.1 知 $\mathscr{A}$ 是稳定的.　　证毕.

以上即为本文的主要结论. 对每一个 $E_i$，其分解 $E_i=G_iH_i$ 都不是唯一的. 适当选取分解方法，可使 $\sup_{\omega}\{\bar{\sigma}[H(j\omega I-A_0)^{-1}G]\}$ 或 $\sup_{\omega}\{\rho[|H(j\omega I-A_0)^{-1}G|]\}$ 减小，即使 $\mathscr{A}$ 的可知稳定上界 $\varepsilon^*$ 增大.

设 $E_i$ 奇异值依次为 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_{r_i}$，则 $E_i$ 可作奇异分解 $E_i=U\mathrm{diag}[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{r_i}]V$，其中 $U'U=VV'=I_{r_i}$，令 $G_i=U\mathrm{diag}[\sigma_1^{1/2},\sigma_2^{1/2},\cdots,\sigma_{r_i}^{1/2}]$，$H_i=[\sigma_1^{1/2},\sigma_2^{1/2},\cdots,\sigma_{r_i}^{1/2}]V$，则 $E_i=G_iH_i$，且 $\bar{\sigma}[G_i]\bar{\sigma}[H_i]$ 取得最小值，为 $\sigma_1$.

以上分解方法一般说来可产生低保守性.

## 4　例　子

**例 1**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2+k_1 & 0 & -1+k_1\\ 0 & -3+k_2 & 0\\ -1+k_1 & -1+k_2 & -4+k_1\end{bmatrix}x.$$

此例首先出现于[9]，而后多次被[1]，[4]等引用. 它们所得的鲁棒稳定上限分别是

1) $|k_i|<0.52070$[9],

2) $|k_i|<0.8151$[1],

3) $|k_i|<1.55328$[4].

用本文的方法，先对 $E_1,E_2$ 作如下分解

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}[1\quad 0\quad 1],\quad E_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}[0\quad 1\quad 0],$$

得

$$G=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

以及

$$\sup_\omega\rho[|H(j\omega I-A_0)^{-1}G|]=0.5714=1/1.75,$$

$$\sup_\omega\bar{\sigma}[H(j\omega I-A_0)^{-1}G]=0.5813=1/1.715.$$

由此得鲁棒稳定上限为 $\varepsilon^*=\max[1.75,1.715]=1.75$. 这实际上就是最大鲁棒稳定上界.

**例 2**

$$A_0=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&0\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}k_1&0\\k_2&0\end{bmatrix}.$$

本例取自[1],[1]的鲁棒稳定上限为 $|k_i|<0.6575$,[7]也用到这一例子,结论为 $|k_i|<0.6667$.

用本文的方法,先得到 $G=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$,以及

$$\sup_\omega\bar{\sigma}[H(j\omega I-A_0)^{-1}G]=\sqrt{2}=1/0.707,$$

$$\sup_\omega\rho[|H(j\omega I-A_0)^{-1}G|]=1.093=1/0.915.$$

由定理 3.2 可知,当 $|k_i|<0.915$ 时,$A_0+E$ 保持稳定,其保守性比[1]和[7]明显要低.

将本文方法用于其它例子,也得到了很好的效果.

## 5 结 论

本文通过对角化方法得到了新的鲁棒性判别方法,将这方法用于文献中常采用的几个典型例子,都得到了很好的效果,其中一个例子达到了最大鲁棒稳定上界,另一个保守性也有很大程度的降低.

## 参 考 文 献


[1] Yedavalli, R. K. and Liang, Z.. Reduced Consevation in Stability Robustness Bounds by State Transformation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, AC-31(9):863—865

[2] Juang, Y. T., Kuo, T. S., Hsu, C. F. and Wang, S. D.. Root-Locus Approach to the Stability Analysis of Interval Matrix. Int. J. Control, 1987, 46(3):817—822

[3] Sezer, M. E. and Siljak, D. D.. A Note on Robust Stability Bound. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(11):1212—1215

[4] Zhou, K. and Khargonekar, P. P.. Stability Robustness Bounds for Linear State Space Models with Structured Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(7):621—623

[5] Siljak, D. D.. Parameter Space Method for Robust Control Design. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(7):674—688

[6] Lewkowicz, L. and Sivan, R.. Maximal Stability Robustness Bounds for State Equations. IEEE Trans. Automat.

Contr., 1988, AC-33(3): 297—300

[7] Chou, J. H.. Stability Robustness of Linear State-Space Models with Structured Perturbations. Systems and Control Letters, 1990, 15: 207—210

[8] Foo, Y. K. and Soh, Y. C.. Stability Analysis of a Family of Matrices. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35 (11): 1257—1259

[9] Patel, R. V. and Toda, M.. Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems. Proc. Jacc, Paper TP8—A

# Robust Analysis for Systems with Uncertain Parameters in State Matrix

HU Tingshu and SHI Songjiao

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200030, PRC)

**Abstract**: This paper investigates the robust stability of systems with uncertain parameters in state matrix. The system to be discussed is $\dot{x}=(A_0+\sum_{i=1}^{m}k_iE_i)x$, where $k_i$ are uncertain parameters. By transforming the uncertain part into diagonal form, and utilizing special properties of determinant and matrix, some robustness measures with reduced conservation are derived. Applying these measures to several typical examples, there are obvious reduction in the conservation as compared to former results and the bounds obtained are near the exact ones.

**Key words**: robustness; parameter perturbed systems; conservatism reduction; diagonal form; upper bounds for robust stability

## 本文作者简介

**胡庭姝** 女. 1966 年生. 1985 年、1988 年和 1990 年分别在上海交通大学获得工学学士、硕士和博士学位. 博士论文方向是 $H_\infty$ 控制和鲁棒控制. 现在主要研究兴趣是实参数不确定系统和结构式不确定系统的鲁棒分析与设计.

**施颂椒** 1933 年生. 1956 年毕业于上海交通大学. 现为上海交通大学自动控制系教授. 曾在控制系统计算机辅助设计,广义系统理论,线性系统的鲁棒控制等方面进行过研究. 现在主要从事结构式不确定系统的鲁棒控制等研究.