第9卷第5期
1992年10月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 9, No. 5
Oct., 1992

求解对偶 Riccati 方程的矩阵符号函数法

罗宗虔
（华中理工大学自动控制系·武汉，430074）

摘要：本文介绍一种求解对偶代数 Riccati 方程正定(负定)稳定(反稳定)解的方法——矩阵符号函数法，给出这些解的唯一存在的充分必要条件和算法实现.

关键词：矩阵符号函数；Riccati 方程；Hamiltonian 矩阵

1 引　言

在控制系统最优化设计诸如 LQ，LQG 和 H_∞方法中，要求解一个或多个 Riccati 方程. 在某些方法中(如计算 LQG 平衡坐标)要计算以下两个对偶 Riccati 方程：

1) $A^TP+PA-PBB^TP+C^TC=0,\quad P=P^T\in\mathscr{R}^{n\times n},$ (1)

2) $A\Pi+\Pi A^T-\Pi C^TC\Pi+BB^T=0,\quad \Pi=\Pi^T\in\mathscr{R}^{n\times n}.$ (2)

当系统(A,B)可控，(C,A)可观时，方程(1)，(2)分别存在唯一的正定稳定解(Positive Definite Stabilizing Solution)和负定反稳定解(Negative Definite Anti-Stabilizing Solution). 记

P_+：(1)式的唯一正定稳定解；

P_-：(1)式的唯一负定反稳定解；

Π_+：(2)式的唯一正定稳定解；

Π_-：(2)式的唯一负定反稳定解.

应该指出，(A,B)可控，(C,A)可观是上述解的充分条件.

如果采用 Schur 向量法求解上述两个对偶 Riccati 方程，则需要计算两个 Hamiltonian 矩阵. 若采用本文介绍的方法，则只需计算一个 Hamiltonian 矩阵符号函数，便可算出上述两个方程的四个解.

2 矩阵符号函数法

定义 1　设矩阵 $H\in\mathscr{R}^{q\times q}$没有纯虚数特征值，且有约旦分解

$$H=T(D+N)T^{-1}. \tag{3}$$

其中 $D=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_q\}$，$\lambda_i$ 为 H 矩阵的特征值，N 为幂零矩阵(如果 H 阵可对角化，则 N 为零阵)，T 为非奇异变换阵. 那么矩阵 H 的符号函数定义为

$$Z=\mathrm{sign}(H)=T\mathrm{diag}\{\mathrm{sign}(\lambda_1),\cdots,\mathrm{sign}(\lambda_q)\}T^{-1}. \tag{4}$$

其中

$$\mathrm{sign}(\lambda_i)=\begin{cases}+1, & \mathrm{Re}(\lambda_i)>0,\\ -1, & \mathrm{Re}(\lambda_i)<0.\end{cases}$$

显然，若 H 阵无纯虚数特征值，则其符号函数满足下述矩阵方程

本文于1991年2月28日收到. 1991年10月14日收到修改稿.

$$Z^2 - I = 0, \tag{5}$$

采用牛顿迭代公式

$$Z_{k+1} = \frac{1}{2}(Z_k + Z_k^{-1}) \tag{6}$$

进行计算,便可求得 H 阵的符号函数

$$\lim_{k\to\infty} Z_k = \mathrm{sign}(H). \tag{7}$$

用符号函数法求解方程(1),(2)时,首先利用上述定义,计算与方程(1)相对应的 Hamiltonian 矩阵的符号函数,然后按以下定理,便可分别求得方程(1),(2)的四个解.

定理 1 设矩阵 $H=\begin{bmatrix} A & -BB^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 没有纯虚特征值,其矩阵符号函数为

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \mathrm{sign}(H). \tag{8}$$

那么,当(A,B)可控,(C,A)可观时,下述方程

$$\begin{pmatrix} Z_{12} \\ Z_{22}+I \end{pmatrix} P_+ = -\begin{pmatrix} Z_{11}+I \\ Z_{21} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{12} \\ Z_{22}-I \end{pmatrix} P_- = -\begin{pmatrix} Z_{11}-I \\ Z_{21} \end{pmatrix} \tag{10}$$

的解 P_+和 P_-是 Riccati 方程(1)的唯一正定稳定解和负定反稳定解.

由于方程(2)的 Hamiltonian 矩阵 $\overline{H}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & -C^{\mathrm{T}}C \\ -BB^{\mathrm{T}} & -A \end{bmatrix}=H^{\mathrm{T}}$ 及符号函数的以下性质

$$\mathrm{sign}(H^{\mathrm{T}}) = (\mathrm{sign}(H))^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

便有以下定理.

定理 2 设矩阵 $H=\begin{bmatrix} A & -BB^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 没有纯虚特征值,其符号函数如(8)式所示,那么,当(A,B)可控,(C,A)可观时,下述方程

$$\begin{pmatrix} Z_{21}^{\mathrm{T}} \\ Z_{22}^{\mathrm{T}}+I \end{pmatrix} \Pi_+ = -\begin{pmatrix} Z_{11}^{\mathrm{T}}+I \\ Z_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{21}^{\mathrm{T}} \\ Z_{22}^{\mathrm{T}}-I \end{pmatrix} \Pi_- = -\begin{pmatrix} Z_{11}^{\mathrm{T}}-I \\ Z_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

的解 Π_+和 Π_-是 Riccati 方程(2)的唯一正定稳定解和负定反稳定解.

定理的证明详见参考文献[1].

由(9),(10),(12),(13)式可看出,方程(1)和(2)的四个解只与一个 Hamiltonian 矩阵符号函数有关.所以,当 H 阵的符号函数求出后,通过(9),(10),(12),(13)式便可求得方程(1),(2)的四个解.

应该指出,当(A,B)可稳,(C,A)可检测时,式(9),(10),(12),(13)求得的解是半正定稳定解和半负定反稳定解.

3 Riccati 方程(1),(2)的解存在的充要条件

定理 3 设 $H=\begin{bmatrix} A & -BB^{\mathrm{T}} \\ -C^{\mathrm{T}}C & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 没有纯虚特征值,则 Riccati 方程(1)存在唯一正定

稳定解和负定反稳定解的充要条件是(A,B)可稳，(C,A)可观；对偶地，方程(2)存在唯一正定稳定解和负定反稳定解的充要条件是(A,B)可控，(C,A)可检测.

证　见参考文献[5].

对应上述定理，用H的符号函数表示的充要条件可用以下定理描述.

定理4　设$H=\begin{bmatrix} A & -F \\ -G & -A^{\mathrm T}\end{bmatrix}\in\mathscr{R}^{2n\times 2n}$，且$F=BB^{\mathrm T}=F^{\mathrm T}$，$G=C^{\mathrm T}C=G^{\mathrm T}$，那么，有

1) 方程(1)存在唯一正定对称稳定解的充要条件是H没有纯虚特征值，且

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Z_{12} \\ Z_{22}+I\end{pmatrix}=n.$$

2) 方程(1)存在唯一负定对称反稳定解的充要条件是H没有纯虚特征值，且

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} Z_{12} \\ Z_{22}-I\end{pmatrix}=n.$$

其中Z_{12}，Z_{22}是H的符号函数Z的分块矩阵. 方程(2)的解的充要条件，有与上述定理相似的结论.

证　见参考文献[1].

4　算法实现

用矩阵符号法求解Riccati方程(1)，(2)式的步骤如下：

1) 构成Hamiltonian矩阵$H=\begin{pmatrix} A & -BB^{\mathrm T} \\ -C^{\mathrm T}C & -A^{\mathrm T}\end{pmatrix}$；

2) 采用改进的Baurand加速矩阵符号函数迭代法[3],[4]，计算H的符号函数$\tilde{Z}$：

$$\tilde{Z}_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k\tilde{Z}_k+\frac{1}{a_k}\tilde{Z}_k^{-1}\right),$$

$$\tilde{Z}_0=H_0,$$

$$\tilde{Z}=\lim_{k\to\infty}\tilde{Z}_k.$$

其中$H_0=\tilde{T}^{-1}H\tilde{T}$为$H$的最小范数矩阵，$\tilde{T}$为对角相似变换阵，$a_k=\sqrt{\dfrac{\|\tilde{Z}_k^{-1}\|}{\|\tilde{Z}_k\|}}$为加速系数；

3) 计算

$$Z=\operatorname{sign}(H)=\tilde{T}\tilde{Z}\tilde{T}^{-1};$$

4) 将Z进行分块，并按(9)，(10)，(12)，(13)便可求得P_+，P_-，Π_+，Π_-四个解.

5　结束语

本文介绍的算法已用C语言实现并在IBM-PC/XT微机上通过. 算例表明，此算法用于求解对偶Riccati方程时，计算效率大大高于Schur向量法. 此算法也可推广到求解非对称的Riccati方程[1].

参考文献

[1] Kenney, C., Laub, A. J. and Jonckheere, E. A.. Positive and Negative Solution of Dual Riccati Equation by Matrix Sign Function Iteration. Systems and Control Letters, 1989, 13(2):109—116

[2] Pearce, C. E. M.. On the Solution of a Class of Algebraic Riccati Matrix Equations, IEEE Trans. Automat. Contr.,

1986, AC-31(3):252—255

[3] Bautaud, A. R.. An Accelerated Newton Process to Solve Riccati Equation via Matrix Sign Function, Computer Aided Design of Control Systems. Proc. IFAC, Symp., 1980, 9—14

[4] 涂健,王永骥. 一种求解 Riccati 方程的新方法——矩阵符号函数法. 华中工学院学报,1987,15(4):171—175

[5] 韩京清,何关钰,许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳:辽宁科学出版社,1985,783—785

Solving Dual Riccati Equations by Matrix Sign Function Iteration

LUO Zongqian

(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology · Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: This paper presents a method——matrix sign function iteration for the positive definite (negative definite) stabilizing (anti-stabilizing) solutions of matrix algebraic dual Riccati equations. The necessary and sufficient conditions for existence of these unique solutions are given. The implementation of the algorithm is also given.

Key words: matrix sign function; Riccati equation; Hamiltonian matrix

本文作者简介

罗宗虔 1934 年生. 1957 年毕业于华中工学院工业企业电气化专业. 现为华中理工大学自动控制系副教授,硕士生导师. 长期从事控制系统数字仿真与 CAD 的教学和科研工作,目前从事最优化设计和智能控制方面的研究.