第 9 卷第 5 期
1992 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 5
Oct., 1992

延时系统最优控制的方块脉冲函数新算法

王兴涛　邢继祥

(哈尔滨工业大学应用数学系，150006)

摘要：本文应用方块脉冲函数的积分矩阵的极好运算性质，得到了延时线性系统二次型最优控制问题的更适用于计算机计算的状态反馈形式的分段综合控制，以及最优状态轨线与最优控制的分段恒定解答和目标泛函的最优值.

关键词：方块脉冲函数；延时系统；最优控制

1 引　言

文献[1]用方块脉冲函数求出了延时系统的近似解答及最优控制的分析解. 文献[2]利用沃尔什函数分析了延时系统. 正如文献[3]所指出的：方块脉冲函数优于沃尔什函数的特点之一是对整个控制时间历程均匀划分得出的子区间数 m 是任意取的正整数，而不必是 2 的正整数幂. 但是[1]中关于延时 $\tau_l=l\dfrac{T}{m}$(l,m 是正整数)的选择，限制了方块脉冲函数的优点. 例如：$\tau_l=\dfrac{1}{3}$，$T=1$ 时，m 必须选择 3 的正整数倍，即 3，6，9，12，15，…… . 本文应用方块脉冲函数不仅对选择 m 做了改进使之为任意正整数，而且导出了便于工程实际应用的状态反馈形式的分段综合控制表示式，进而得到了最优状态轨线与最优控制的分段恒定解答及目标泛函的最优值. 值得指出的是，在本文的算法中因用矩阵

$$\Delta \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{1}$$

取代了积分运算矩阵

$$E \triangleq \frac{T}{m}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{m\times m}, \tag{2}$$

从而节约大量计算机内存和机时.

本文于1991年2月1日收到，1991年9月14日收到修改稿.

2 主要方块脉冲函数理论结果

$t\in[0,T)$上 m 个分量的方块脉冲函数族表达式为

$$\pi_k(t)=\begin{cases}1, & (k-1)\dfrac{T}{m}\leqslant t<k\dfrac{T}{m},\\ 0, & 其它,\ k=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{3}$$

性质1 设有$[0,T)$上向量函数 $C(t)$,其分量在$[0,T)$上平方可积,若有近似展开式

$$C(t)\doteq\sum_{k=1}^{m}C_k\pi_k(t)=\overline{C}\pi(t), \tag{4}$$

则 $C(t)$的方块脉冲函数展开式均方收敛于 $C(t)$[4]. 其中

$$\overline{C}=[C_1,C_2,\cdots,C_m],\quad C_k=\frac{m}{T}\int_{(k-1)\frac{T}{m}}^{k\frac{T}{m}}C(t)\mathrm{d}t,\quad k=1,2,\cdots,m, \tag{5}$$

$$\pi(t)=[\pi_1(t),\pi_2(t),\cdots,\pi_m(t)]^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

性质2 方块脉冲函数积分运算矩阵 E 满足[5]

$$\int_0^t\pi(\tau)\mathrm{d}\tau\doteq E\pi(t),\quad 0\leqslant t<T, \tag{7}$$

又有[3]

$$\int_t^T\pi(\tau)\mathrm{d}\tau\doteq E^{\mathrm{T}}\pi(t),\quad 0\leqslant t<T. \tag{8}$$

根据(1)与(2)式,可以证明

$$E-E\Delta=\frac{T}{2m}(I_1+\Delta). \tag{9}$$

其中 I_1是 m 阶单位矩阵.

3 延时状态方程的求解

考虑延时线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)+Cx(t-\tau_l)+Du(t-\tau_h),\\ x(t)&=\hat{x}(t),\quad -\tau_l\leqslant t\leqslant 0,\\ u(t)&=\hat{u}(t),\quad -\tau_h\leqslant t\leqslant 0.\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $x(t)=[x_i(t)]_{n\times1}$为状态向量,$u(t)=[u_j(t)]_{r\times1}$为控制向量. $\tau_l,\tau_h\geqslant0$分别为状态和控制的延时量. A,B,C 和 D 是与之相容的常数矩阵.

为节省篇幅,下文有关方块脉冲函数展开式的符号,无说明则与(5)式含义类似. 把(10)式右端的函数分别按方块脉冲函数展开,有

$$\begin{cases}x(t)=\sum_{k=1}^{m}x_k\pi_k(t)=\overline{X}\pi(t),\\ u(t)=\sum_{k=1}^{m}u_k\pi_k(t)=\overline{U}\pi(t),\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}x(t-\tau_l)=\sum_{k=1}^{m}\tilde{x}_k\pi_k(t)=\widetilde{X}\pi(t),\\ u(t-\tau_h)=\sum_{k=1}^{m}\tilde{u}_k\pi_k(t)=\widetilde{U}\pi(t).\end{cases} \tag{12}$$

取正整数 l 与 h 及 $0\leqslant\alpha_l,\alpha_h<1$ 满足 $\tau_l=(l+\alpha_l)\frac{T}{m}$, $\tau_h=(h+\alpha_h)\frac{T}{m}$, 则有[5]

$$\begin{cases}\tilde{X}=\bar{X}H_l+\hat{X},\\ \tilde{U}=\bar{U}H_h+\hat{U}.\end{cases}\tag{13}$$

其中

$$H_s=(1-\alpha_s)\Delta^s+\alpha_s\Delta^{s+1},\quad s=l,h,\tag{14}$$

$$\begin{cases}\hat{X}=[\hat{x}_l,\hat{x}_{l-1},\cdots,\hat{x}_1,\hat{x}_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m-l-1}],\\ \hat{U}=[\hat{u}_h,\hat{u}_{h-1},\cdots,\hat{u}_1,\hat{u}_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{m-h-1}],\end{cases}\tag{15}$$

$$\begin{cases}\hat{x}_0=\frac{m}{T}\int_{-\alpha_l\frac{T}{m}}^{0}\hat{x}(t)\mathrm{d}t,\quad \hat{x}_i=\frac{m}{T}\int_{-(i+\alpha_l)\frac{T}{m}}^{-(i-1+\alpha_l)\frac{T}{m}}\hat{x}(t)\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,l,\\ \hat{u}_0=\frac{m}{T}\int_{-\alpha_h\frac{T}{m}}^{0}\hat{u}(t)\mathrm{d}t,\quad \hat{u}_j=\frac{m}{T}\int_{-(j+\alpha_h)\frac{T}{m}}^{-(j-1+\alpha_h)\frac{T}{m}}\hat{u}(t)\mathrm{d}t,\quad j=1,2,\cdots,h.\end{cases}\tag{16}$$

把(13)式代入(12)式得

$$\begin{cases}x(t-\tau_l)=\bar{X}H_l\pi(t)+\hat{X}\pi(t),\\ u(t-\tau_h)=\bar{U}H_h\pi(t)+\hat{U}\pi(t).\end{cases}\tag{17}$$

对(10)式中第一式从0到 t 积分后，把(11)与(17)式代入，再利用(7)式可推出

$$\bar{X}=[A\bar{X}+C\bar{X}H_l+B\bar{U}+D\bar{U}H_h+C\hat{X}+D\hat{U}]E+[\underbrace{x(0),\cdots,x(0)}_{m}].\tag{18}$$

对(18)式两端同时右乘 $(-\Delta)$ 后，再加到(18)式，再利用(9)式得

$$\bar{X}(I_1-\Delta)=\frac{T}{2m}A\bar{X}(I_1+\Delta)+\frac{T}{2m}C\bar{X}(H_l+H_{l+1})+\frac{T}{2m}B\bar{U}(I_1+\Delta)$$
$$+\frac{T}{2m}D\bar{U}(H_h+H_{h+1})+\left[\frac{T}{2m}(C\hat{X}+D\hat{U})(I_1+\Delta)+\tilde{X}_0\right].\tag{19}$$

其中

$$\tilde{X}_0=[x(0),\underbrace{0,\cdots,0}_{m-1}].\tag{20}$$

所以利用矩阵的 Kronecker 乘积[8]，(19)式可写成

$$LX=FU+W,\tag{21}$$

或状态分段恒定解答的形式

$$X=MU+N.\tag{22}$$

其中

$$\begin{cases}L=I-\Delta^{\mathrm{T}}\otimes I_2-\frac{T}{2m}(I_1+\Delta^{\mathrm{T}})\otimes A-\frac{T}{2m}(H_l^{\mathrm{T}}+H_{l+1}^{\mathrm{T}})\otimes C,\\ F=\frac{T}{2m}(I_1+\Delta^{\mathrm{T}})\otimes B+\frac{T}{2m}(H_h^{\mathrm{T}}+H_{h+1}^{\mathrm{T}})\otimes D,\end{cases}\tag{23}$$

$$\begin{cases}X=[x_1^{\mathrm{T}},x_2^{\mathrm{T}},\cdots,x_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\ U=[u_1^{\mathrm{T}},u_2^{\mathrm{T}},\cdots,u_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\end{cases}\tag{24}$$

$$W=\frac{T}{2m}[(I_1+\Delta)\otimes C](\mathrm{cs}\hat{X})+\frac{T}{2m}[(I_1+\Delta)\otimes B](\mathrm{cs}\hat{U})+X_0,\tag{25}$$

$$\begin{cases} \mathrm{cs}\hat{X} = [\hat{x}_l^{\mathrm{T}}, \hat{x}_{l-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, \hat{x}_1^{\mathrm{T}}, \hat{x}_0^{\mathrm{T}}, 0^{\mathrm{T}}, \cdots, 0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \\ \mathrm{cs}\hat{U} = [\hat{u}_k^{\mathrm{T}}, \hat{u}_{k-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, \hat{u}_1^{\mathrm{T}}, \hat{u}_0^{\mathrm{T}}, 0^{\mathrm{T}}, \cdots, 0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \\ X_0 = [x^{\mathrm{T}}(0), \underbrace{0^{\mathrm{T}}, \cdots, 0^{\mathrm{T}}}_{m-1}]^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{26}$$

$$M = L^{-1}F, \quad N = L^{-1}W. \tag{27}$$

I为 mn 阶，I_2为 n 阶的单位矩阵. 可以看出 L 为稀疏带状下三角块阵，而 $\det L=[\det(I_2-\frac{T}{2m}A)]^m$，所以 L 是可逆的. 该算法比[1]的算法将节约大量计算机内存和机时.

4 最优控制的综合

问题是求在系统(10)式下使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \tag{28}$$

达到最小的最优控制律. 其中 Q 为 n 阶半正定对称矩阵，R 为 r 阶正定对称矩阵.

根据文献[7]有

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + A^{\mathrm{T}}P(t) + C^{\mathrm{T}}P(t+\tau_l) + Qx(t) = 0, \\ Ru(t) + B^{\mathrm{T}}P(t) + D^{\mathrm{T}}P(t+\tau_k) = 0, \\ P(t) = 0, \quad t \geqslant T. \end{cases} \tag{29}$$

把 $P(t)$，$P(t+\tau_l)$和 $P(t+\tau_k)$分别按方块脉冲函数展开，再由文献[6]知

$$\begin{cases} P(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k\pi_k(t) = \overline{P}\pi(t), \\ P(t+\tau_l) = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{P}_{lk}\pi_k(t) = \widetilde{P}_l\pi(t) = \overline{P}H_l^{\mathrm{T}}\pi(t), \\ P(t+\tau_k) = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{P}_{kk}\pi_k(t) = \widetilde{P}_k\pi(t) = \overline{P}H_k^{\mathrm{T}}\pi(t). \end{cases} \tag{30}$$

对(29)式中的第一式从 t 到 T 积分，代入(30)与(11)式的第一式，再利用(8)式可推出

$$\overline{P} = [A^{\mathrm{T}}\overline{P} + C^{\mathrm{T}}\overline{P}H_l^{\mathrm{T}} + Q\overline{X}]E^{\mathrm{T}}. \tag{31}$$

把(31)式两端同时右乘($-\Delta^{\mathrm{T}}$)后，加到(31)式，并注意 $E\Delta=\Delta E$，再利用(9)式可获得

$$\overline{P}(I_1 - \Delta^{\mathrm{T}}) = \frac{T}{2m}A^{\mathrm{T}}\overline{P}(I_1 + \Delta^{\mathrm{T}}) + \frac{T}{2m}C^{\mathrm{T}}\overline{P}(H_l^{\mathrm{T}} + H_{l+1}^{\mathrm{T}}) + \frac{T}{2m}Q\overline{X}(I_1 + \Delta^{\mathrm{T}}), \tag{32}$$

用 Kronecker 乘积，(32)式可写成

$$L^{\mathrm{T}}P = \frac{T}{2m}[(I_1 + \Delta) \otimes Q]X = \frac{T}{2m}[(I_1 + \Delta) \otimes I_2][(I_1 \otimes Q]X. \tag{33}$$

容易证明

$$(L^{\mathrm{T}})^{-1}[(I_1 + \Delta) \otimes I_2] = [(I_1 + \Delta) \otimes I_2](L^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{34}$$

则(33)式可转化为

$$P = \frac{T}{2m}[(I_1 + \Delta) \otimes I_2](L^{-1})^{\mathrm{T}}[(I_1 \otimes Q]X. \tag{35}$$

把(11)式中的第二式及(30)式中的第一，第三式代入(29)式中的第二式得出

$$R\overline{U} + B^{\mathrm{T}}\overline{P} + D^{\mathrm{T}}\overline{P}H_k^{\mathrm{T}} = 0, \tag{36}$$

即

$$(I_1 \otimes R)U + (I_1 \otimes B^{\mathrm{T}})P + (H_h \otimes D^{\mathrm{T}})P = 0. \tag{37}$$

联结(35),(37)及(27)式可得最优控制器综合表述式

$$U = -(I_1 \otimes R^{-1})M^{\mathrm{T}}(I_1 \otimes Q)X. \tag{38}$$

联合(22)与(38)式可得状态轨线的分段恒定解答

$$X = [I + M(I_1 \otimes R^{-1})M^{\mathrm{T}}(I_1 \otimes Q)]^{-1}N \tag{39}$$

及最优控制律的分段恒定解答

$$U = -(I_1 \otimes R^{-1})M^{\mathrm{T}}(I_1 \otimes Q)[I + M(I_1 \otimes R^{-1})M^{\mathrm{T}}(I_1 \otimes Q)]^{-1}N. \tag{40}$$

把(11)式代入(28)式,再利用(40)和(39)式得目标最优值为

$$J = \frac{T}{2m}X^{\mathrm{T}}(I_1 \otimes Q)X + \frac{T}{2m}U^{\mathrm{T}}(I_1 \otimes R)U. \tag{41}$$

5 数值计算例子

考虑文献[2]中的例子,延时系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) + x(t - \frac{1}{3}) - \frac{1}{2}u(t - \frac{2}{3}), \\ x(t) = 1, \quad -\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 0, \\ u(t) = 0, \quad -\frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 0, \end{cases}$$

求使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)]\mathrm{d}t$$

达到最小的最优控制器的综合表达式,状态最优轨线.最优控制的分段恒定解及目标最优值.

解 $A=-1, B=1, C=1, D=-\frac{1}{2}, Q=1, R=\frac{1}{2}, T=1, \tau_l=\frac{1}{3}, \tau_h=\frac{2}{3}$,取 $m=10$,

则 $l=3, \alpha_l=\frac{1}{3}, \frac{T}{m}=\frac{l}{10}, h=6, \alpha_h=\frac{2}{3}$.

由(38)式可解得

$$U = -\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_9 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & a_1 \\ & & & a_0 \end{bmatrix} X.$$

其中

$$a_0 = 0.0952, \quad a_1 = 0.1814, \quad a_2 = 0.1641, \quad a_3 = 0.1515, \quad a_4 = 0.1474,$$
$$a_5 = 0.1487, \quad a_6 = 0.1342, \quad a_7 = 0.0883, \quad a_8 = 0.0623, \quad a_9 = 0.0700.$$

利用(39),(40)和(41)式可以得到状态轨线,最优控制的分段恒定解答及目标值分别为

$$X = [0.9408, 0.8326, 0.7478, 0.6857, 0.6383, 0.6009, 0.5833, 0.6038, 0.6446, 0.6797]^{\mathrm{T}},$$
$$U = -[0.8700, 0.7804, 0.6294, 0.5066, 0.4027, 0.3087, 0.2193, 0.1410, 0.0877, 0.0474]^{\mathrm{T}},$$
$$J = 0.3068.$$

与文献[2]的沃尔什算法的结果比较相差很小,而本文算法却更加简便易行、实用有效。

参 考 文 献

[1] 陈明武,童调生.一种采用方块脉冲函数求解延时最优控制问题的算法.自动化学报,1988,14(6):458—462

[2] Palanisamy, K. R. and Rao, G. P.. Optimal Control of Linear Systems with Delays in State and Control via Walsh Functions. Proc, Instn elect. Engrs., 1983, 130:300—312

[3] 徐宁寿,郑兵.方块脉冲函数用于线性时变系统的分析和最优控制.自动化学报,1982,8(1):35—41

[4] 邢继祥,王兴涛.方块脉冲函数用于非线性系统的分析以及最优控制的综合.自动化学报,1985,11(2):175—183

[5] Sannuti, P.. Analysis and Synthesis of Dynamic Systems via Block-Pulse Functions. Proc. Instn elect. Engrs., 1977, 124:569—571

[6] Rao, G. P. and Srinivasan, T.. Analysis and Synthesis of Dynamic Systems Containing Time Delays via Block-Pulse Functions. Proc. Instn elect. Engrs., 1978, 125:1064—1068

[7] Koivo, H. N. and Lee, E. B.. Controller Systhesis for Linear Systems with Retarded State and Control Variables and Quadratic Cost. Automatica, 1972, 8:203—208

[8] 须田信英等著;曾长修译.自动控制中的矩阵理论.北京:科学出版社,1979

A New Algorithm for Optimal Control of Time Delay Systems via Block-Pulse Functions

WANG Xingtao and XING Jixiang

(Department of Applied Mathematics, Haerbin Institute of Technology·Haerbin, 150006, PRC)

Abstract: In this paper, by using the elegant operational properties of the integral matrix of block-pulse functions, the piecewise feedback gain of quadratic optimal control problem of linear system with time delays and the piecewise constant solutions of optimal state and control, as well as the optimal value of objective functional, are obtained.

Key words: block-pulse functions; time delay system; optimal control

本文作者简介

王兴涛 1960年生.1983年毕业于哈尔滨工业大学,在某飞机制造厂工作.1988年研究生毕业,现为哈尔滨工业大学数学系讲师.现在从事最优控制及应用方面的研究.

邢继祥 1939年生.1963年毕业于哈尔滨工业大学,后留校.现为数学系教授.主要从事最优控制理论与应用方面的研究.