第 9 卷第 6 期
1992 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 6
Dec., 1992

线性动态系统的对偶性环

余鄂西

(华中理工大学数学系·武汉,430074)

摘要: 这篇文章探讨了在哪类交换环上使线性动态系统的对偶原理成立,得到了交换环是线性动态系统的对偶性环的充分与必要条件.

关键词: L-对偶性环;全商环;诺特环

1 引 言

令 K 表示实数域,K 上的 n 维线性动态系统为

$$L:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=Fx(t)+Gu(t),\\ y(t)=Hx(t).\end{cases}$$

其中列向量 $x(t)$,$u(t)$,$y(t)$分别为状态向量、输入向量、输出向量,矩阵 $F\in K^{n\times n}$,$G\in K^{n\times m}$,$H\in K^{p\times n}$. 把上述 n 维线性系统记为 $L(H,F,G)$.

L 的对偶系统是

$$L':\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=F'z(t)+H'v(t),\\ w(t)=G'z(t).\end{cases}$$

其中 F',G',H'是 F,G,H 的转置矩阵. 上述对偶系统记为 $L'(G',F',H')$.

对偶原理 系统 L 是能控的(能观的)当且仅当对偶系统 L'是能观的(能控的).

在某类实际问题中,线性系统 L 中的矩阵 F,G,H 也可能是交换环上的矩阵. 例如,延时线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\sum_{i=0}^{r}F_ix(t-ia)+\sum_{i=0}^{s}G_iu(t-ia),\\ y(t)=\displaystyle\sum_{i=0}^{t}H_ix(t-ia).\end{cases}$$

其中 a 是某个正实数,$F_i\in K^{n\times n}$,$G_i\in K^{n\times m}$,$H_i\in K^{p\times n}$,$x(t)$和 $u(t)$分别为 n 维和 m 维列向量. 如果定义延时算子 σ 为 $\sigma(f(t))=f(t-a)$,$f(t)$是任一个标量函数,那么 σ 作用在以函数为分量的列向量 $x(t)$和 $u(t)$上得到 $\sigma(x(t))=x(t-a)$,$\sigma(u(t))=u(t-a)$. 于是,原来的线性系统化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\sum_{i=0}^{r}F_i\sigma^ix(t)+\sum_{i=0}^{s}G_i\sigma^iu(t),\end{cases}$$

本文于1991年3月30日收到. 1991年12月13日收到修改稿.

$$\left| \; y(t) = \sum_{i=0}^{t} H_i \sigma^i x(t). \right.$$

即是

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(\sigma)x(t) + G(\sigma)u(t), \\ y(t) = H(\sigma)x(t). \end{cases}$$

其中 $F(\sigma) = \sum_{i=0}^{r} F_i\sigma^i \in (K[\sigma])^{n\times n}$, $G(\sigma) = \sum_{i=0}^{s} G_i\sigma^i \in (K[\sigma])^{n\times m}$, $H(\sigma) = \sum_{i=0}^{t} H_i\sigma^i \in (K[\sigma])^{p\times n}$, $K[\sigma]$是以 σ 为未定元的实系数多项式环(交换环之一), $(K[\sigma])^{n\times n}$是 $K[\sigma]$环上的所有 $n\times n$ 矩阵的集合.

再例如,离散时间的 n 维线性动态系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + Gu(k), \\ y(k) = Hx(k). \end{cases}$$

其中 k 是整数,矩阵 F,G,H 也可以是交换环上的矩阵.

本文约定 R 表示含有单位元的交换环,$L(H,F,G)$表示环 R 上的 n 维线性动态系统,$L'(G',F',H')$表示其对偶系统.

R. E. Kalman 证明了对域上的有限维线性动态系统,其对偶原理是成立的[1]. 以后, W. S. Ching 和 B. F. Wyman 在诺特环(Noetherian Ring)上对线性动态系统的对偶性作了研究[2]. 究竟有哪类交换环，使线性动态系统的对偶原理成立？本文将就这个问题进行探讨.

设 X(状态模),U(输入模),Y(输出模)是有限自由 R-模,不仿认为是下列同构模

$$X \cong R^n,$$
$$U \cong R^m,$$
$$Y \cong R^p.$$

环 R 上的 $n\times m$ 矩阵 G, $n\times n$ 矩阵 F, $p\times n$ 矩阵 H 视为模同态:

$$G: U \to X,$$
$$F: X \to X,$$
$$H: X \to Y.$$

见[3]. 于是,环 R 上的 n 维线性动态系统 $L(H,F,G)$可表示为模同态序列

$$L: R^m \xrightarrow{G} R^n \xrightarrow{F} R^n \xrightarrow{H} R^p.$$

其对偶系统 $L'(G',F',H')$可表示为模同态序列

$$L': R^p \xrightarrow{H'} R^n \xrightarrow{F'} R^n \xrightarrow{G'} R^m.$$

引理 1　设 $L(H,F,G)$是环 R 上的 n 维线性动态系统,则下列三条等价:

1) $L(H,F,G)$是能控的.

2) $n\times nm$ 能控性矩阵

$$A = [G\ FG \cdots F^{n-1}G]$$

的列生成自由模 R^n.

3) A 的所有 n 阶子式生成的行列式理想(有限生成)$I_n(A) = R$.

引理 2　设 $L(H,F,G)$是环 R 上的 n 维线性动态系统,则下列两条等价:

1) $L(H,F,G)$是能观的.

2) $pn\times n$ 能观性矩阵

$$B=\begin{bmatrix}H\\HF\\\vdots\\HF^{n-1}\end{bmatrix}=[H'\ F'H'\ \cdots\ (F')^{n-1}H']',$$

使理想 $I_n(B)$的零化子 $\mathrm{annih}(I_n(B))=\{0\}$.

定义 1 如果对环 R 上的所有有限维线性动态系统 $L(H,F,G)$对偶原理恒成立,则称 R 是线性动态系统的对偶性环,简称 L-对偶性环.

数域是 L-对偶性环.一般交换环不一定是 L-对偶性环,但有:

引理 3 对任何含单位元的交换环 R,如果 $L'(G',F',H')$是能控的,则 $L(H,F,G)$是能观的.

引理 1,2,3 见[4].

2 主要结果

由引理 3 得到

定义 2 R 是 L-对偶性环当且仅当下列两条等价:

1) 系统 $L(H,F,G)$是能观的.

2) 对偶系统 $L'(G',F',H')$是能控的.

定理 1 含单位元的交换环 R 是 L-对偶性环的充分必要条件是,对 R 的每个有限生成理想 I,如果 $\mathrm{annih}(I)=\{0\}$,则 I 含有 R 中的可逆元.

证 设 R 是 L-对偶性环.令 $a_1,\cdots,a_r$ 生成理想 I,且 $\mathrm{annih}(I)=\{0\}$.考虑 $n=1$ 维系统

$$L:R^m\xrightarrow{G}R\xrightarrow{F}R\xrightarrow{H}R^r,$$

其 F,G 是任意的 $1\times1,1\times m$ 矩阵,H 是 $r\times1$ 矩阵(列向量)

$$H=(a_1,\cdots,a_r)'.$$

$L(H,F,G)$的能观性矩阵是

$$B=[H'\ F'H'\ \cdots\ (F')^{n-1}H']'.$$

可见 $I_1(B)=I_1(H)=I$,又 $\mathrm{annih}(I)=\{0\}$,根据引理 2,$L(H,F,G)$是能观的.另一方面,$L'(G',F',H')$的能控性矩阵是

$$A=[H'\ F'H'\ \cdots\ (F')^{n-1}H'],$$

使 $I_1(A)=I_1(H)=I$.如果 I 中不含 R 中的可逆元,则 $I_1(A)\subsetneqq R$,$L'(G',F',H')$不是能控的,与 R 矛盾.

反之,设 R 上任一个 n 维的 $L(H,F,G)$是能观的,能观性矩阵是

$$B=[H'\ F'H'\ \cdots\ (F')^{n-1}H']'.$$

$L'(G',F',H')$的能控性矩阵是

$$A=[H'\ F'H'\ \cdots\ (F')^{n-1}H'].$$

比较后得到 $I_n(A)=I_n(B)$.又因 $I_n(A)$是有限生成理想,如含 R 中的可逆元,则 $I_n(A)=R$,于是 $L'(G',F',H')$能控,从而推得 R 是 L-对偶性环.

定义 3 设 S 是环 R 的所有非零因子的集合,称

$$R_s \triangleq S^{-1}R = \left\{\frac{r}{s}: r \in R,\ s \in S\right\}$$

是 R 的全商环.

引理 4 $\frac{r}{s}$是 R_s 中的可逆元的充分必要条件是 r 是 R 的非零因子.

引理 5 如果 R 的每个非零因子都是 R 中的可逆元,则 $R_s=R$.

引理 4,5 见[5].

定理 2 含单位元的交换环 R 是 L-对偶性环的必要条件是 R 等于它的全商环,即 $R=R_s$.

证 设 r 是 R 的非零因子,r 生成理想 $I=(r)=rR$,且 $\mathrm{annih}(I)=\{0\}$. 根据定理 1,I 中含 R 中的可逆元,由 $I=rR=R$,知 r 是可逆元. 由引理 5 知 $R=R_s$.

定理 3 对任何含单位元的交换环 R,如果使 $\mathrm{annih}(I)=\{0\}$的每个有限生成理想 I 满足条件:$I\cap S\neq\Phi$,则全商环 R_s 是 L-对偶性环.

证 设 $\bar{s}$ 是 R_s 中的所有非零因子的集合,由引理 5 知 R_s 等于它的全商环,即$(R_s)_{\bar{s}}=R_s$. S 中的每个元都是 R_s 中的可逆元. 若 I 是 R 的理想,$I\cap S\neq\Phi$,则 $IR_s=R_s$. 反之亦真. 对 R_s 中的每个理想 J,存在 R 的理想 I,使

$$J = IR_s = \left\{\frac{i}{s}: i \in I,\ s \in S\right\}.$$

J 是有限生成的当且仅当 I 是有限生成的. 由 $\mathrm{annih}(I)=\{0\}$知 $\mathrm{annih}(J)=\{0\}$. 由 $I\cap S\neq\Phi$ 知 $J=IR_s=R_s$. 根据定理 1,R_s 是 L-对偶性环.

下面的定理 4 是 W. S. Ching 和 B. F. Wyman 的结果[2]. 事实上,它是上面定理的推论,下面给出新的证明.

定理 4 如果诺特环 R 等于它的全商环,则 R 是 L-对偶性环.

证 设 $L(H,F,G)$能观,能观性矩阵 $B=[H'\ F'H'\ \cdots\ (F')^{n-1}H']'$使 $\mathrm{annih}\ (I_n(B))=\{0\}$. $L'(G',F',H')$的能控性矩阵 $A=[H'\ F'H'\ \cdots\ (F')^{n-1}H']$. 因 R 是诺特环,对任何零因子生成的理想 I,存在非零元 $r\in R$ 使$\forall\ x\in I$ 有 $rx=0$,即 $\mathrm{Annih}(I)\neq\{0\}$[4]. 因此,$I_n(B)$中含非零因子. 又因 $R=R_s$,$I_n(A)=I_n(B)$中含可逆元. 根据定理 1,$L'(G',F',H')$是能控的. 反之,如 $L'(G',F',H')$是能控的,由引理 3 得知 $L(H,F,G)$能观. 从而证得诺特环 R 是 L-对偶性环.

推论 1 诺特环 R 的全商环 R_s 是 L-对偶性环.

证 R 是诺特环,则 R_s 也是诺特环,且$(R_s)_{\bar{s}}=R_s$. 根据定理 4,R_s 是 L-对偶性环.

推论 2 设 R 是诺特环,x 是 R 上的未定元,则多项式环 $R_s[x]$是 L-对偶性环.

证 根据 Hilbert 基定理,$R_s[x]$是诺特环. 又因$(R[x])_s=R_s[x]$,令 $\bar{s}$ 是 R_s 中所有非零因子的集合,则$(R_s[x])_{\bar{s}}=(R_s)_{\bar{s}}[x]=R_s[x]$,诺特环 $R_s[x]$等于它自己的全商环.

参 考 文 献

[1] Kalman, R.. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. SIAM J. Control, 1963, 1:152—192

[2] Ching, W. S. and Wyman, B. F.. Duality and the Regulator Problem for Linear Systems Over Commutative Rings. Linear Algebra Appl. 1977, 18:257—266

[3] Mcdonald, B. R.. Linear Algebra Over Commutative Rings. Marcel Dekker, New York, 1984

[4] Brewer, J. W., Bunce, J. W. and Van Vleck F. S.. Linear Systems Over Commutative Rings. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 104, Marcel Dekker, New York, 1986

[5] Zariski, O. and Sanuel, P.. Commutative Algebra I. Van Nostrand, Priceton, 1958

The Duality Ring of Linear Dynamical Systems

YU E'xi

(Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology · Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: This paper discussed what kinds of commutative rings over which the duality principle of linear dynamical systems holds. We concluded sufficient and/or necessary conditions that the commutative ring is the duality ring of linear dynamical systems.

Key words: L-duality ring; total quotient ring; noetherian ring

本文作者简介

余鄂西 1937年生. 1961年毕业于华中理工大学. 毕业后留校任教，一直从事数学基础课的教学. 副教授. 专业方向是代数学. 目前的研究兴趣为系统科学与控制论中的代数应用.