第 9 卷第 6 期　　控制理论与应用　　Vol. 9, No. 6
1992 年 12 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1992

H_∞超优化控制问题的 S 域解法

王正志

(国防科技大学自动控制系・长沙,410073)

摘要：本文研究了 H_∞超优化控制问题的 S 域解法. 我们在 H_∞优化控制问题解基础上，用其退化解对非退化部分稍加处理，就可把非退化部分分离出来从而进一步优化. 本文给出了 H_∞超优化控制问题的解决方法和具体公式，直观简便实用. 具体实例验证了解法的正确性.

关键词：H_∞超优化；退化；对角化

1　引　　言

许多控制问题，特别是鲁棒控制问题，可以归化为

$$\min_{H(s)\in H_\infty^{m\times r}} \| W(s) + H(s)U(s) \|_\infty. \tag{1}$$

其中 $W(s)\in H_\infty^{m\times r}$, $U(s)\in H_\infty^{r\times r}$, $W(s)$和 $U(s)$是已知的有理函数矩阵.

由于矩阵的 H_∞范数仅是该矩阵的最大奇异值，所以 H_∞优化，只是对矩阵 $W+HU$ 的所有方向中的那个最大奇异值作了优化，而对于 $W+HU$ 的其他各个方向上的奇异值没有进行优化. 这种对于矩阵仅在一个方向指标上进行优化的做法显然是太粗略了. 许多控制问题需要矩阵函数所有方向上同时进行优化，只有这样的解才能称得上是真正最优的. 数学上，这个问题的提法是

$$\min_{H(s)\in H_\infty^{m\times r}} \sigma_i(W(s) + H(s)U(s)), \quad i = 1,\cdots,\min(m,r), \tag{2}$$

这里 $\sigma_i(A(s))$表示矩阵 $A(s)$在所有 $s=j\omega$ 上的第 i 个最大奇异值，$\sigma_1,\cdots,\sigma_{\min(m,r)}$按从大到小的次序排列. 由于对于所有 $i>\min(m,r)$，有 $\sigma_i(A)\equiv 0$，所以上述优化仅对前面 $\min(m,r)$个奇异值进行. 显然，这个问题有很深刻的抽象性和广泛性. 我们把问题(2)叫做 H_∞超优化问题.

最近 M. C. Tsai, D. W. Gu, Postlethwaite 给出了 H_∞超优性问题的状态空间解法[1]. 但由于他们把解法限于状态空间中进行，使得他们的解法显得相当复杂，失去了直观性和简捷性. 由于控制系统更多地用 S 域上传递函数描述的，所以 S 域解法将有更大的实用性. 我们对 H_∞超优化问题在 S 域的解法研究表明，可得到更为直观和简捷的解法. 只要把 H_∞优化解中的退化部分对非退化部分进行并不复杂的处理，就可达到把非退化部分分离出来的目的. H_∞超优化问题可以被分解为对各级退化和非退化部分的分离和求解.

2　基本准备

H_∞优化问题(1)应该分二步求解. 首先由 Pick 方程求出最大特征值，从而得到其最优 H_∞范数. 第二步是，用此最优 H_∞范数，把该系统规范化，使得最优 H_∞范数变为 1，然后求

本文于 1991 年 5 月 6 日收到. 1991 年 11 月 25 日收到修改稿.

$$\Phi = (W + HU) \cap BH_{\infty}^{m\times r} \tag{3}$$

的解. $BH_{\infty}^{m\times r}$是 $H_{\infty}^{m\times r}$中的单位球. 它的全部解可用算子在单位球上的酉扩张来得到. 由于该系统最优范数为 1,这样达到奇异值为 1 的那些方向,构成了算子的退化部分,而奇异值没有达到 1 的那些方向,构成了算子的非退化部分. 这样后者可以进一步被收缩,从而进一步被优化.

对于 $U(s)$无虚轴零点的情形,(3)的全部解具有如下形式[2~5]:

$$\Phi = L\{\Xi\} = \begin{bmatrix}\Xi C + D\\ F\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\Xi A + B\\ E\end{bmatrix}, \ \Xi \in BH_{\infty}^{(m-r_0)\times(r-r_0)}, \tag{4}$$

$$L = \begin{bmatrix}L_+\\ L_-\\ L_0\end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix}A & C\\ B & C\\ E & F\end{bmatrix} \begin{array}{l} r-r_0\\ m-r_0\\ r_0\end{array}\\ \begin{array}{cc} r & m\end{array}\end{array}. \tag{5}$$

其中 $\{E,F\}$张成系统算子图象在 Krein 空间中的 r_0维零矢量空间,它反映了算子的退化部分,退化度为 r_0. $\{A,C\}$张成了正空间,$\{B,D\}$张成了负空间,它们都反映了算子的非退化部分.

由于 $E(s)$和 $F(s)$构成 Krein 空间中的零空间,所以有

$$E(s)E(s)^* = F(s)F(s)^*.$$

这里

$$E(s)^* \triangleq E^{\mathrm{T}}(-s).$$

其中 $E^{\mathrm{T}}(-s)$是把 $E(-s)$中的所有系数矩阵取共轭转置. 由于有理矩阵 $E(s)$的所有元素具有公分母 $\prod_{i=1}^{s}(s+\bar{s}_i)$,其中 s_i 为 $U(s)$的所有右半平面零点(假设均为单零点). 所以

$$E(s) = E_p(s)/\prod_{i=1}^{s}(s+\bar{s}_i).$$

这里 $E_p(s)$是多项式矩阵. 我们以后为了简化计算,从多项式矩阵 $E_p(s)$出发,对于多项式矩阵 $E_p(s)$和 $F_p(s)$,同样存在着关系

$$E_p(s)E_p(s)^* = F_p(s)F_p(s)^*. \tag{6}$$

对于 $E_p(s)E_p(s)^*$可以进行二种谱分解:

$$E_p(s)E_p(s)^* = (E_pE_p^*)^{\frac{1}{2}*}(E_pE_p^*)^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$E_p(s)E_p(s)^* = (E_pE_p^*)^{\frac{c}{2}*}(E_pE_p^*)^{\frac{c}{2}}. \tag{8}$$

这二种谱分解的区别在于,$(E_pE_p^*)^{\frac{1}{2}}$包含了 $E_p(s)E_p(s)^*$的所有左半平面零点(稳定零点),而 $(E_pE_p^*)^{\frac{c}{2}}$包含了 $E_p(s)E_p(s)^*$的所有右半平面零点(不稳定零点). 这样 $(E_pE_p^*)^{\frac{1}{2}*}$只有不稳定零点,$(E_pE_p^*)^{\frac{c}{2}*}$只有稳定零点.

对于多项式矩阵 $E_p(s)$,从多项式方程

$$E_p(s)X(s) = 0$$

解出多项式矩阵 $X(s)$,并定义 $E_p^{\perp}(s)\triangleq X(s)^*$. 于是有

$$E_p(s)E_p^{\perp}(s)^* = 0. \tag{9}$$

由 $E_p(s)$和 $E_p^{\perp}(s)$,以及它们的谱分解,可以定义

$$N(s) = \left[E_p^{\perp *}(E_p^{\perp}E_p^{\perp *})^{-\frac{1}{2}}, E_p^*(E_pE_p^*)^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{10}$$

$N(s)$ 是稳定的内函数，　$N(s)^*N(s)=I.$ (11)

同样由$F_p(s)$ 和$F_p^\perp(s)$，定义　$M(s)=\begin{bmatrix}(F_p^\perp F_p^{\perp *})^{-\frac{1}{2}*}F_p^\perp \\ (F_pF_p^*)^{-\frac{1}{2}*}F_p\end{bmatrix}.$ (12)

$M(s)$ 是不稳定的内函数，　$M(s)M^*(s)=I.$ (13)

3 退化和非退化部分的分离及递推求解

利用退化部分的 $E_p(s)$和 $F_p(s)$产生的内函数 $N(s)$和 $M(s)$，对系统 $\Phi(s)=W(s)+H(s)U(s)$作变换

$$\Phi_d(s)=M(s)\Phi(s)N(s). \tag{14}$$

注意到 $\Phi(s)$，$M(s)$，$N(s)$分别具有形式(4)，(12)，(10)，可得

$$\Phi_d(s)=\begin{bmatrix}(\Xi\widetilde{C}+\widetilde{D})^{-1}(\Xi\widetilde{A}+\widetilde{B}), & * * \\ 0, & I_{r_0}\end{bmatrix}. \tag{15}$$

其中
$$\begin{bmatrix}\widetilde{A} & \widetilde{C}\\ \widetilde{B} & \widetilde{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & C\\ B & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_p^{\perp *}(E_p^\perp E_p^{\perp *})^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & F_p^{\perp *}(F_p^\perp F_p^{\perp *})^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}. \tag{16}$$

(15)式中右上角是比较复杂的函数，暂用 * * 表示. 由于(14)中 $M(s)$和 $N(s)$是内函数，具有性质(11)和(13)，所以在它们作用下，H_∞范数保持不变，

$$\|\Phi_d(s)\|_\infty=\|\Phi(s)\|_\infty=1,$$

这就导致(15)中右上角 * * 中各元素必须都为0，所以 $\Phi_d(s)$是块对角化了的，它的左上角对应着原系统非退化部分，右下角对应于退化部分. 在(15)式中，当 Ξ 在 $BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$ 变化时，产生了落入单位球内的规范 H_∞优化问题的所有可行解 $\Phi(s)$，这时(1)中的 H 在 $H_\infty^{m\times r}$的某个子区域中变化. 我们希望寻找 H（或即 Ξ），使得能够极小化所有奇异值 $\sigma_i(\Phi(s))$. 由于(14)中的二个内函数 $M(s)$和 $N(s)$具有保持所有奇异值不变的性质，

$$\sigma_i(\Phi(s))=\sigma_i(\Phi_d(s)),\quad \forall\ i$$

现在 $\Phi_d(s)$是被对角化的，退化部分 I_{r_0}具有 r_0个为1的奇异值. 所以要对 $\Phi(s)=W(s)+H(s)U(s)$进行 H_∞超优化，只要对剩下的非退化部分

$$\widetilde{\Phi}=(\Xi\widetilde{C}+\widetilde{D})^{-1}(\Xi\widetilde{A}+\widetilde{B}),\quad \Xi\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)} \tag{17}$$

进行 H_∞超优化即可. 在(17)中直接用 Ξ 进行$\|\widetilde{\Phi}\|_\infty$优化，比较困难. 下面，我们要把非退化部分 $\widetilde{\Phi}(s)$的 H_∞超优化问题，变换为我们已熟悉的形式.

在(15)中取定 $\Xi=\Xi_0\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$，(15)就确定了 H_∞优化问题的一个可行解 Φ^0，这时对应的 $H=H^0$. Φ^0在被对角化后变为 Φ_d^0. 而对于任意 $\Xi\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$，由(15)产生可行解 $\Phi=W+HU$，在被对角化后变为 Φ_d，

$$\Phi_d=M\Phi N=M\Phi^0N+M\Delta\Phi N=\Phi_d^0+M\Delta HUN, \tag{18}$$

这里 $\Delta\Phi=\Phi-\Phi^0$，$\Delta H=H-H^0$. 由于

$$\Phi_d=\begin{bmatrix}\widetilde{\Phi} & 0\\ 0 & I_{r_0}\end{bmatrix},\quad \Phi_d^0=\begin{bmatrix}\widetilde{\Phi}^0 & 0\\ 0 & I_{r_0}\end{bmatrix},$$

所以有
$$M\Delta HUN=\begin{bmatrix}\Delta\widetilde{\Phi} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{19}$$

注意 M，N 的分块结构(12)和(10)，由(19)可得

$$H(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{0.79098s+1.72211}{s+2.26842}, & \dfrac{(s+2)(0.30610s+0.86633)}{(s+1)(s+2.26842)}\\ \dfrac{0.60326s+1.34841}{s+2.26842}, & \dfrac{-(s+2)(0.48109s+1.03944)}{(s+1)(s+2.26842)}\end{bmatrix},$$

所得到的 H_∞超优解 $\hat{\Phi}(s)$的奇异值为(对所有 $s=j\omega$ 的最大奇异值):

$$\sigma_1(\hat{\Phi}(s))=1,\quad \sigma_2(\hat{\Phi}(s))=0.56574.$$

5 结 论

本文给出了用 S 域传递函数方法解决 H_∞超优化控制问题的办法和算法. 在 H_∞优化解的基础上,用其退化空间的 $E(s)$和 $F(s)$对负空间的 $B(s)$和 $D(s)$稍加处理,就可以降阶为下级具有相同形式的 H_∞超优化问题,从而可以递推求解. 不必计算正空间的 $A(s)$和 $C(s)$. 整个计算简捷实用. H_∞超优化控制问题的计算量只比 H_∞优化控制问题的计算量增加了一点点,但得到的解的性能将好很多. 因为 H_∞超优化是在所有方向上都进行了优化,而 H_∞优化只优化了最大奇异值的那个方向. 从本文的例子可见,H_∞优化解只能保证 $\sigma_2(\Phi(s))\leqslant 1$,而 H_∞超优化解有 $\sigma_2(\hat{\Phi}(s))=0.56574$. 所以,$H_\infty$超优化将大大地克服 H_∞优化的固有缺点——过于保守. 因此我们认为,H_∞超优化控制问题的解决和实用性算法的使用,将大大地推进 H_∞方法在控制系统设计上的使用.

参 考 文 献

[1] Tsai, M. C., D. W. Gu and Postlethwaite, I.. A State-Space Approch to Super-Optimal H_∞ Control Problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33, 833—843

[2] Francis, B. A.. A Course in H_∞ Control Theory. New York, Springer-Verlag, 1987

[3] Wang, Z. Z. and Pearson, J. B.. Regulation and Optimal Error Reduction in Linear Multivariable Systems. Preprints of 9th IFAC World Congress, 1984

[4] Wang, Z. Z.. Synthesis of Linear Multivariable Systems in H_∞ Norm, Proc. of IECON, 1984

An Approach in S Domain to Super-Optimal H_∞ Control Problems

WANG Zhengzhi

(Department of Automatic Control, National University of Defense Technology · Changsha, 410073, PRC)

Abstract: We study super-optimal H_∞ control problems in S domain in thispaper. Based on the expressions of optimal H_∞ solutions, we candialyze the non-degenerate part by dealing with it by the degeneratepart, and the further optimize it. The approach and concrete formulas tosuper-optimal H_∞ control problems are given in this paper, andthey are intuitional, simple and useful. An example is calculated by these formulas, and the validity of the approach and formulas is checked up.

Key words: super-optimal H_∞; degenerate; diagonalization

本文作者简介

王正志 见本刊 1992 年第 2 期第 134 页.