

非线性系统的微分几何方法 在交流传动控制中的应用

陈 冲 王 炎 齐 虹

(哈尔滨工业大学电气工程系, 150006)

摘要: 本文采用非线性系统的微分几何方法实现交流异步电动机的解耦控制和完全线性化, 为交流传动系统提出了一种新的控制方法.

关键词: 非线性解耦控制; 线性化; 交流传动; 异步电动机

1 引言

基于微分几何理论研究非线性系统的解耦和完全线性化问题是近年来新发展起来的一种控制方法. 在交流传动中交流异步电动机的数学模型是非线性、多变量和耦合的, 而且经过适当变换可以写成仿射非线性系统形式, 本文采用非线性系统的微分几何法实现交流异步电动机的解耦控制和完全线性化, 使得系统被完全解耦成两个独立的线性单变量系统: 转子磁链系统和转速系统, 从而可用线性控制理论设计交流数字调速系统.

设仿射非线性系统由下列方程描述

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i(t), \quad y(t) = h(x). \quad (1.1)$$

其中 x 是 n 维 C^∞ 流形 M 上的局部坐标, $f, g_1, \dots, g_m$ 分别是 M 上的 C^∞ 向量场, h 是 M 上的 C^∞ 映射, 即: $h: M \rightarrow R^l$.

设:

$$r_i = \min\{k_i | [L_{g_1} L_f^{k_i-1} h_i(x), \dots, L_{g_m} L_f^{k_i-1} h_i(x)] \neq 0\}, \quad (i = 1, \dots, l), \quad x \in M. \quad (1.2)$$

当系统(1.1)的输出通道数等于控制变量数时($l=m$), 为了获得系统在 M 上解耦条件, 构造下列矩阵

$$D(x) \triangleq \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x), \dots, L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x), \dots, L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}, \quad E(x) \triangleq \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

定理 1^[1] 非线性系统(1.1)可解耦的充分必要条件是上述 $(m \times m)$ 维矩阵 $D(x)$ 在 M 上是非奇异的. 其状态反馈解耦控制律为

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = -[D(x)]^{-1}E(x) + [D(x)]^{-1}v. \quad (1.4)$$

当系统(1.1)中 $l < m$ 时, 有下列推论:

推论 1 如果非线性系统(1.1)满足下列条件, 那么系统在 M 上是可解耦的:

1) 存在 M 上的 C^∞ 函数 $h_i(x)$ ($i=l+1, \dots, m$) 和相应的正整数 r_i ($i=l+1, \dots, m$) 使得

$$[L_{g_1} L_f^{k_1} h_1(x), \dots, L_{g_m} L_f^{k_m} h_m(x)] = 0, \quad k_i < r_i - 1, \quad x \in M,$$

$$[L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x), \dots, L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x)] \neq 0, \quad x \in M.$$

2) 由(1.3)式定义的 \$(m \times m)\$ 维函数矩阵 \$D(x)\$ 在 \$M\$ 上是非奇异的.

对于可解耦系统, (1.4) 式并不是唯一的解耦控制律, 它的更一般形式为

$$u = [D(x)]^{-1} \{ \xi(x) - E(x) + \Lambda(x)v \}. \quad (1.5)$$

其中

$$\Lambda(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(x) \end{bmatrix}, \quad \xi(x) = \begin{bmatrix} \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_m(x) \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_i(x), \xi_i(x) \in \text{span}\{h_i(x), L_f h_i(x), \dots, L_f^{r_i-1} h_i(x)\}, \quad (i = 1, \dots, m).$$

关于系统(1.1)反馈精确线性化问题, 文献[2]讨论了一般的数学分析方法. 文献[3]证明了非线性可解耦系统当 \$\sum_{i=1}^m r_i = n\$ 时, 通过状态反馈解耦控制律(1.4)和非线性坐标变换, 系统可以被变换成完全线性化的解耦系统. 非线性坐标变换 \$z(x) = (z_1^T(x), \dots, z_m^T(x))^T\$ 定义了 \$M\$ 上的一个局部坐标 \$\{z_i(x)\}\$, 它的选取为

$$z_i(x) = \begin{bmatrix} z_{i1}(x) \\ z_{i2}(x) \\ \vdots \\ z_{ir_i}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i(x) \\ L_f h_i(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (1.6)$$

2 交流传动系统的解耦和完全线性化

采用电压源逆变器供电的异步电动机, 当定子和转子都变换到两相同步旋转的 \$d-q\$ 坐标系时, 它的动态数学模型为[4]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 x_1 + k_2 x_3 + \frac{L_m}{\sigma L_r} x_4 x_5 \\ -k_1 x_2 + k_2 x_4 - \frac{L_m}{\sigma L_r} x_3 x_5 \\ \frac{L_m}{T_r} x_1 - \frac{1}{T_r} x_3 - x_4 x_5 \\ \frac{L_m}{T_r} x_2 - \frac{1}{T_r} x_4 + x_3 x_5 \\ k_3 (x_2 x_3 - x_1 x_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_4 \\ -x_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_3 = f(x) + \sum_{i=1}^3 g_i(x) u_i,$$

$$y_1 = h_1(x) = x_3^2 + x_4^2, \quad y_2 = h_2(x) = x_5. \quad (2.1)$$

其中 \$x_1 = i_{sd}, x_2 = i_{sq}\$: 定子电流 \$d, q\$ 轴分量; \$x_3 = \psi_{rd}, x_4 = \psi_{rq}\$: 转子磁链 \$d, q\$ 轴分量; \$x_5 = \omega_r\$: 转子角速度; \$u_1 = u_{sd}, u_2 = u_{sq}\$: 定子电压 \$d, q\$ 轴分量; \$u_3 = \omega_1\$: 定子角速度; \$y_1 = |\psi_r|^2\$: 转子磁链幅值; \$y_2 = \omega_r\$; \$L_s, L_r\$: 定、转子电感; \$R_1, R_2\$: 定、转子电阻; \$L_m\$: 定转子互感; \$n_p\$: 极对数; \$J\$: 系统转动惯量; \$k_1 = \frac{R_1 L_s^2 + R_2 L_m^2}{\sigma L_r^2}\$; \$k_2 = \frac{R_2 L_m}{\sigma L_r^2}\$; \$k_3 = \frac{n_p^2 L_m}{J L_r}\$; \$T_r = \frac{L_r}{R_2}\$; \$\sigma = L_s - \frac{L_m^2}{L_r}\$. 显然系统(2.1)为定义在一

个五维流形 $M = \{x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T : x_3 \neq 0, x_4 \neq 0\}$ 上的形如 (1.1) 式的仿射非线性系统. 根据 τ_i 的定义计算可得

$$L_{g_j} h_1(x) = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad L_f h_1(x) = 2 \frac{L_m}{\sigma T_r} (x_1 x_3 + x_2 x_4) - \frac{2}{T_r} (x_3^2 + x_4^2),$$

$$L_{g_1} L_f h_1(x) = \frac{2L_m}{\sigma T_r} x_3, \quad L_{g_2} L_f h_1(x) = \frac{2L_m}{\sigma T_r} x_4, \quad L_{g_3} L_f h_1(x) = 0.$$

因此有 $\tau_1 = 2$. 同理可得

$$L_{g_j} h_2(x) = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad L_f h_2(x) = k_3 (x_2 x_3 - x_1 x_4),$$

$$L_{g_1} L_f h_2(x) = -\frac{k_3}{\sigma} x_4, \quad L_{g_2} L_f h_2(x) = \frac{k_3}{\sigma} x_3, \quad L_{g_3} L_f h_2(x) = 0.$$

因此有 $\tau_2 = 2$.

为了满足推论 1 中的条件, 设 M 上存在一个 C^∞ 函数 $h_3(x)$ 使得 $\tau_3 = 1$, 即 $[L_{g_1} h_3(x), L_{g_2} h_3(x), L_{g_3} h_3(x)] \neq 0$. 为了简化解耦控制律, 取

$$L_{g_1} h_3(x) = L_{g_2} h_3(x) = 0, \quad L_{g_3} h_3(x) \neq 0.$$

于是可得偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial h_3}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial h_3}{\partial x_4} x_3 \neq 0, \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

所以有

$$\frac{\partial h_3}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial h_3}{\partial x_4} x_3 \neq 0.$$

这样可以得到方程 (2.2) 的一个特解

$$h_3(x) = x_3^2 - x_4^2. \quad (2.3)$$

根据 (1.3) 式, 构造

$$D(x) = \begin{bmatrix} \frac{2L_m}{\sigma T_r} x_3 & \frac{2L_m}{\sigma T_r} x_4 & 0 \\ -\frac{k_3}{\sigma} x_4 & \frac{k_3}{\sigma} x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4x_3 x_4 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

显然当 $x_3 \neq 0, x_4 \neq 0$ 时, $D(x)$ 在 M 上是非奇异的, 所以有

$$[D(x)]^{-1} = \frac{1}{y_1} \begin{bmatrix} \frac{\sigma T_r}{2L_m} x_3 & -\frac{\sigma}{k_3} x_4 & 0 \\ \frac{\sigma T_r}{2L_m} x_4 & \frac{\sigma}{k_3} x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_1}{4x_3 x_4} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

从而系统满足推论 1 的条件. 由 (1.3) 和 (1.4) 式可得系统的状态反馈解耦控制律为

$$u(t) = -[D(x)]^{-1}E(x) + [D(x)]^{-1}v(t) \quad (2.6)$$

其中

$$E(x) \triangleq \begin{bmatrix} E_1(x) \\ E_2(x) \\ E_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{T_r}[(L_m k_2 + \frac{2}{T_r})y_1 + \frac{L_m}{k_3}x_5\dot{x}_5 - (k_1 L_m + \frac{3L_m}{T_r})A_1(x) + \frac{L_m^2}{T_r}A_2(x)] \\ k_3[-\frac{L_m}{\sigma L_r}x_5 y_1 - \frac{1}{k_3}(k_1 + \frac{1}{T_r})\dot{x}_5 - x_5 A_1(x)] \\ \frac{2L_m}{T_r}(x_1 x_3 - x_2 x_4) - \frac{2}{T_r}(x_3^2 - x_4^2) - 4x_3 x_4 x_5 \end{bmatrix},$$

$$A_1(x) = (x_1 x_3 + x_2 x_4), \quad A_2(x) = (x_1^2 + x_2^2), \quad y_1 = (x_3^2 + x_4^2). \quad (2.7)$$

由于 $\sum_{i=1}^3 r_i = 5 = n$, 所以系统在 M 上可被完全线性化^[3]. 由(1.6)式可得局部坐标 $\{z_i\}$

$$z(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{bmatrix}, \quad z_1(x) = \begin{bmatrix} z_{11}(x) \\ z_{12}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ L_f h_1(x) \end{bmatrix},$$

$$z_2(x) = \begin{bmatrix} z_{21}(x) \\ z_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2(x) \\ L_f h_2(x) \end{bmatrix}, \quad z_3(x) = h_3(x). \quad (2.8)$$

3 状态反馈解耦控制律的简化

为了使得系统的状态反馈解耦控制律在工程应用上可实现, 必须对(2.6)式进行简化. 由于系统更一般的解耦控制律为(1.5)式, 而且有

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(x) &= \bar{\lambda}_i(z_{i1}(x), \dots, z_{i r_i}(x)), \\ \bar{\xi}_i(x) &= \bar{\xi}_i(z_{i1}(x), \dots, z_{i r_i}(x)), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.1)$$

于是由控制律(1.5)所得的闭环系统在 $\{z_i\}$ 坐标下为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_1(z_{11}, z_{12}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\lambda}_1(z_{11}, z_{12}) \end{bmatrix} v_1, \quad y_1 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} = z_{11}, \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_2(z_{21}, z_{22}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\lambda}_2(z_{21}, z_{22}) \end{bmatrix} v_2, \quad y_2 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} = z_{21}, \quad (3.3)$$

$$\dot{z}_3 = \bar{\xi}_3(z_3) + \bar{\lambda}_3(z_3)v_3. \quad (3.4)$$

为了使得上述闭环解耦系统仍然保持完全线性化, 令

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1(z_{11}, z_{12}) &= a_{11}z_{11} + a_{12}z_{12}, & \bar{\lambda}_1(z_{11}, z_{12}) &= 1, \\ \bar{\xi}_2(z_{21}, z_{22}) &= a_{21}z_{21} + a_{22}z_{22}, & \bar{\lambda}_2(z_{21}, z_{22}) &= 1, \\ \bar{\xi}_3(z_3) &= a_3 z_3, & \bar{\lambda}_3(z_3) &= 1. \end{aligned}$$

为了简化反馈解耦控制律(1.5)式, 取

$$a_{11} = -\frac{2}{T_r}(\frac{R_1}{\sigma} + \frac{1}{T_r}), \quad a_{12} = -(k_1 + \frac{3}{T_r}).$$

从而可得转子磁链子系统(3.2)式的传递函数为

$$G_1(s) = \frac{K_1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \quad (3.5)$$

$$\text{其中 } T_1 = \frac{-2}{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 + 4a_{11}}} > 0, \quad T_2 = \frac{-2}{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 + 4a_{11}}} > 0, \quad K_1 = T_1 T_2 > 0.$$

对于转速子系统(3.3),取 $a_{21}=0, a_{22}=-(k_1+\frac{1}{T_r})$, 从而可得其传递函数为

$$G_2(s) = \frac{K_2}{s(T_3s + 1)} \quad (3.6)$$

其中 $T_3=-\frac{1}{a_{22}}>0, K_2=T_3>0$. 如果考虑负载转矩 T_L , 则转速子系统的动态结构图如图 1 所示.

(3.4)式是一个一阶不能观子系统,为了使得该子系统是稳定的,从而保证

整个系统不会有不稳定的振型,取 $a_3=-\frac{2}{T_r}$, 则(3.4)式可写成

$$\dot{z}_3 + \frac{2}{T_r}z_3 = v_3. \quad (3.7)$$

由于 $\frac{2}{T_r}>0$, 所以该子系统是全局渐近稳定的,它对其他两个子系统的控制不产生影响,因此取它的控制输入量 $v_3=0$. 最后可得经简化后的状态反馈解耦控制律为

$$\begin{bmatrix} u_{\alpha} \\ u_{\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_1} \begin{bmatrix} x_3 & -x_4 \\ y_1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1x_5\dot{x}_5 - c_2A_2(x) + c_3v_1 \\ x_5(c_4y_1 + c_5A_1(x)) + c_1v_2 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\omega_1 = \omega_r + c_6 \left(\frac{x_2}{x_3} - \frac{x_1}{x_4} \right).$$

其中系数 $C_1=\frac{\sigma}{k_3}, C_2=\frac{\sigma L_m}{T_r}, C_3=\frac{\sigma T_r}{2L_m}, C_4=\frac{L_m}{L_r}, C_5=\sigma, C_6=\frac{L_m}{2T_r}$. 这样,通过控制律

(3.8)和坐标变换(2.8),异步电机被简化解耦成由二阶磁链线性子系统和二阶转速线性子系统组成的四阶线性系统. 于是可以用线性控制理论分别设计

磁链调节器和转速调节器,以使系统达到预期的性能指标. 系统的控制结构如图 2 所示.

4 实验结果及结论

交流数字调速系统的控制器是以 16 位单片机 8096 为核心设计的. 由于 8096 进行带符号的 16×16 位乘法或 $32/16$ 位除法仅需要 $7.25\mu s$, 所以为高性能的交流数字调速系统提供了理想的控制器件. 系统采用的电机的功率为 750W, 额定转速为 1390rpm. 为了分析系统的线性关系, 图 3 给出了转子磁链 $y_1=|\psi_r|^2$ 和转速 $y_2=\omega_r$ 的阶跃响应仿真曲线, 它们与由(3.5)和(3.6)式给出的两个线性系统的仿真结果曲线完全一致. 为了验证系统的解耦性, 在图 3 的基础上分别改变系统输入 v_1 (或 v_2), 而保持另一个输入 v_2 (或 v_1)不变, 系统相应输出的阶跃响应仿真曲线分别见图 4 和图 5. 仿真结果表明系统输入/输出

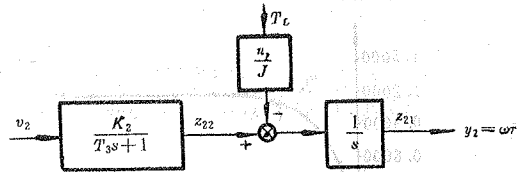


图 1 转速子系统动态结构图

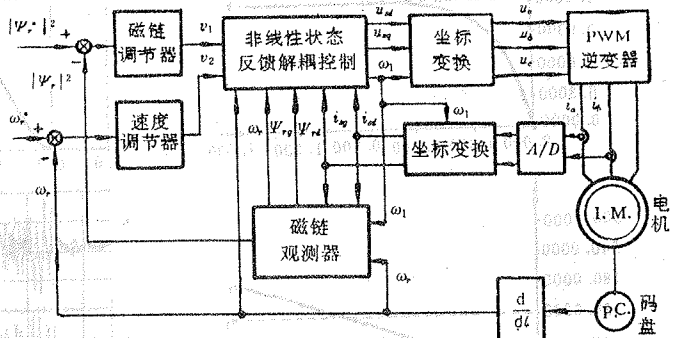


图 2 系统控制结构框图

相互之间无交叉影响,两个线性子系统之间是解耦的。图 6 是额定转速给定时系统响应的实验结果曲线。实验结果表明系统具有良好的动态性能。采用非线性系统的几何法可将异步电机模型化简并解耦成独立的线性单变量系统,从而为交流传动系统提供了一个新的、有效的控制方法。

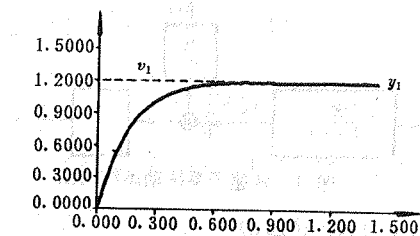


图 3 系统阶跃响应仿真曲线

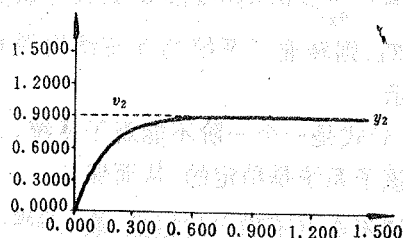


图 4 系统阶跃响应仿真曲线

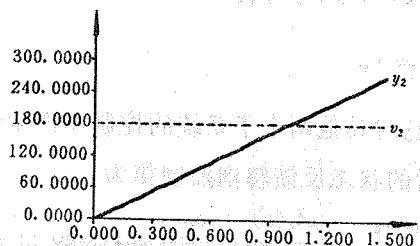


图 5 系统阶跃响应仿真曲线

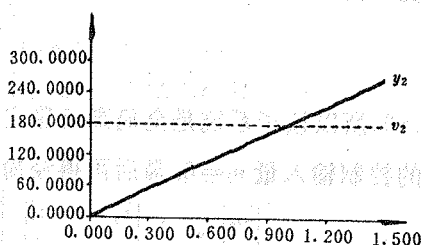


图 6 速度阶跃响应和电流动态响应

参 考 文 献

- [1] Gras, L. C. J. M. and Nijmeijer, H.. Decoupling in Nonlinear System; from Linearity to Nonlinear. Proc. IEE, 1989, 136, Part D, 53—62
- [2] Isidori, A.. Nonlinear Control Systems; An Introduction. Springer, Berlin, 1985, (72):178—253
- [3] Tarn, T. J.. Lectures on Nonlinear Control. Shanghai University of Technology, 1987
- [4] 陈坚. 交流电机数学模型及调速系统. 北京: 国防工业出版社, 1989, 40—76

Application of Nonlinear System Differential Geometric Method in AC Drive Control

CHEN Chong, WANG Yan and QI Hong

(Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology • Harbin, 150006, PRC)

Abstract: Using the method of Differential Geometry, the decoupling control and complete linearization of the induction motor are realized, so a new control method for AC drive system is obtained.

Key words: nonlinear decoupling control; linearization; AC drive; induction motor

本文作者简介

陈 冲 1954 年生. 1982 年和 1985 年在哈尔滨工业大学电气工程系分别获工学学士和工学硕士学位. 1991 年在哈尔滨工业大学控制工程系获工学博士学位. 主要研究兴趣为非线性控制系统的分析和设计以及电力传动自动化.

王 炎 1932 年生. 1956 年毕业于哈尔滨工业大学工业电气自动化专业. 现为该专业教授. 主要从事电力传动自动化领域研究工作. 目前承担机器人控制, 交流伺服系统控制的课题.

齐 虹 女 1961 年生. 1982 年和 1988 年在哈尔滨工业大学电气工程系分别获工学学士和工学硕士学位. 现为哈尔滨工业大学电气工程系讲师. 目前主要研究工作和兴趣为电力传动自动化及电磁场计算.