第 10 卷第 1 期
1993 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 1
Feb., 1993

动态测量系统的有界影响滤波*

胡 峰　　　　范金城

(西安卫星测控中心,710043)　(西安交通大学数学系,710049)

摘要：如何克服 Kalman 滤波对采样观测值中包含的异常数据的敏感性?这在状态估计的抗扰性分析中处重要位置.本文基于新息增量过程,引进了一个相当大的滤波族,称为 W 滤波族.为了控制异常数据对滤波估计的影响,本文主要关心它的一个有界影响子族,并给出在预定的影响界限制下的最优有界影响滤波的 ψ 函数形式.

关键词：动态测量系统;异常数据;抗扰性分析;滤波

1 引　言

在大地测量和卫星外弹道跟踪数据的事后处理中,常因操作失误或记录器的故障,获取的跟踪观测数据中往往有小部分严重偏离主体数据所呈现的趋势或与真实值差别很大[8].通常称这小部分数据为异常数据或野值(outliers).

Martin[5],Martin-Mintz[4]及文献[2]中,通过随机模拟与理论分析指出:通常采用的 Kalman 滤波对采样序列中异常数据的反应很敏感.[2]还严格导出了 Kalman 滤波的小样本崩溃点为$\frac{1}{n}$.即在 n 个观测数据中只要包含一个异常数据就有可能使滤波估计崩溃[7].

对系统的状态估计,寻求具有较好抗扰性能的滤波方法,有较大的理论与实际意义.本文将给出的动态测量系统(1.1)的有界影响滤波便是一种抗扰性滤波,其中系统方程(1.1)为如下形式

$$x_k = \Phi_k x_{k-1} + \varepsilon_{k-1}, \quad y_k = H_k x_k + \eta_k, \tag{1.1}$$

并且假定状态向量 x_k 和观测向量 y_k 分别是 p 与 m 维的,噪声过程$\{\varepsilon_k\}$,$\{\eta_k\}$及初始状态 x_0 满足下述条件:任意 $k,k'\in N$,有

A1) $E\varepsilon_k=0$,　$E\varepsilon_k\varepsilon_{k'}^{\tau}=R_k(\varepsilon)\delta(k-k')$,　$E\varepsilon_k x_0^{\tau}=0$;

A2) $E\eta_k=0$,　$E\eta_k\eta_{k'}^{\tau}=R_k(\eta)\delta(k-k')$,　$E\eta_k x_0^{\tau}=0$;

A3) $E\varepsilon_k\eta_{k'}^{\tau}=0$,　$Ex_0x_0^{\tau}=R_0$,　$Ex_0=0$.

观测向量 $y^k\triangleq(y_1^{\tau},\cdots,y_k^{\tau})^{\tau}$ 如果它的分布密度是二次型 $r_k\triangleq(y^k)^{\tau}C(k)y^k$ 的函数,我们则称 y^k 具有椭球分布(elliptical distribution).可以证明[6]:y^k 的分布密度可以由正态分布的密度通过加权积分给出.即

$$f(y_1,\cdots,y_k) = \int_0^{+\infty} P_w(t)N_{y^k}(0,t^{-1}C(k))\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

称 $P_w(t)$及 $C(k)$为该椭球分布的权函数与特征矩阵.文[6]指出:在允许相差一个常数因

* 本文初稿曾在"中国现场统计第四届学术年会(1989.4西安)"上宣读.
本文于1991年5月24日收到.1992 年 3 月 18 日收到修改稿.

子的意义下，有 $C(k)=Ey^k(y^k)^\tau$. 而且，常见的几类分布如正态分布，Cauchy 分布，t-分布，Laplace 分布以及 Pearson(Ⅱ)分布族和 Pearson(Ⅶ)分布族的分布函数都可以表示成(1.3)的形式[2,6]. 因此，本文进一步假定

A4) $\{y_1,\cdots,y_k\}$服从特征矩阵 $C(k)$，权函数 $P_w(t)$的椭球分布，其分布密度由(1.3)给出，其中 $y^k\triangleq(y_1^\tau,\cdots,y_k^\tau)^\tau$，而 $N_{y^k}(0,t^{-1}C(k))$为均值 0，协方差 $t^{-1}C(k)$的 km 维正态分布的密度函数.

2 新息增量过程与异常数据

论文[6]指出，如果随机向量 $z=(z_1^\tau,z_2^\tau)^\tau$ 服从椭球分布，则它的边际分布亦为椭球分布. 由 A4)可知，在已知 y^{k-1}的条件下，y_k 的条件分布密度为 $f(y_k|y^{k-1})$：

$$
\begin{aligned}
f(y_k|y^{k-1}) &= f(y_1,\cdots,y_k)/f(y_1,\cdots,y_{k-1}) \\
&= \int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^k}(0,t^{-1}C(k))\mathrm{d}t\Big/\int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))\mathrm{d}t \\
&= \frac{\int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))N_{\tilde{y}(k|k-1)}(0,t^{-1}\widetilde{C}_{kk})\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))\mathrm{d}t}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

式中 1) $\tilde{y}(k|k-1)\triangleq y_k-E(y_k|y^{k-1})=y_k-C_{12}^\tau(k)C^{-1}(k-1)y^{k-1}$, (2.2)

2) $\widetilde{C}_{kk}\triangleq C_{kk}-C_{12}^\tau(k)C^{-1}(k-1)C_{12}(k)$,

3) $C_{kk}\triangleq Ey_ky_k^\tau$, $C_{12}(k)\triangleq Ey^{k-1}y_k^\tau$ 分别由$\{y_1,\cdots,y_k\}$的椭球分布特征矩阵的分块表示确定，即

$$
C(k)=\begin{pmatrix} C(k-1) & C_{12}(k) \\ C_{12}^\tau(k) & C_{kk}\end{pmatrix}
\tag{2.3}
$$

式(2.1)及(2.2)的证明，只须考虑到多元正态分布的条件分布仍为正态分布等性质即可，详细过程此略.

在 m 维随机变量所组成的线性空间中，定义内积运算$\langle y_1,y_2\rangle=Ey_1^\tau y_2$，并且取过程初值为 $\tilde{y}(1|0)\triangleq y_1$，则随机序列$\{\tilde{y}(k|k-1),k\in N\}$具有下列性质：

B1) $E\tilde{y}(k|k-1)=0$,　$E\tilde{y}(k|k-1)\tilde{y}(k'|k'-1)^\tau=0$,　$(k\neq k')$;

B2) 用 $\mathscr{L}\{\cdot\}$表示张成线性子空时，有下列直交分解关系

$$\mathscr{L}\{y_1,\cdots,y_k\}=\mathscr{L}\{\tilde{y}(0|1)\}+\mathscr{L}\{\tilde{y}(2|1)\}+\cdots+\mathscr{L}\{\tilde{y}(k|k-1)\};$$

B3) 记 $\tilde{y}^k\triangleq(\tilde{y}(1|0)^\tau,\cdots,\tilde{y}(k|k-1)^\tau)^\tau$，则 $E(y_{k+1}|y^k)=E(y_{k+1}|\tilde{y}^k)$.

由于条件期望 $E(y_k|y^{k-1})=C_{12}^\tau(k)C^{-1}(k-1)y^{k-1}$，可以看成是随机向量 y_k 在线性内积空间 $\mathscr{L}\{y_1,\cdots,y_{k-1}\}$上的投影. 利用线性空间有关知识不难给出上述性质 B1)～B3)的证明，详细过程可参见[2,3].

由 B2)，线性子空间 $\mathscr{L}\{\tilde{y}(k|k-1)\}$中所包含的是增加样本带来的新增信息，而 $\tilde{y}(k|k-1)=y_k-E(y_k|y^{k-1})$则表示基于样本$\{y_1,\cdots,y_{k-1}\}$所能给出的最优(一步)预报的预报残差. 因此，称序列$\{\tilde{y}(k|k-1),k\in N\}$为新息增量过程(innovation process).

另一方面，由式(2.1)可看出一步预报密度 $f(y_k|y^{k-1})$是观测值 y^{k-1}和(一步)预报残差 $\tilde{y}(k|k-1)$的函数，并考虑到在均方意义下 $E(y_k|y^{k-1})$是 y_k 的最优预报估计，因此当且仅当 $\tilde{r}_k=\tilde{y}(k|k-1)^\tau\widetilde{C}_{kk}^{-1}\tilde{y}(k|k-1)$充分大时，可以合理地认为 y_k 是极端异常数据.

鉴于上述分析,我们希望构造一组递推滤波估计方法使之具备下列性质:

B4) 当 $\tilde{r}_k$ 充分大时,能有效地控制观测值 y_k 带来"错误"新息对滤波估计的影响;

B5) 当 $\tilde{r}_k$ 不太大时,能充分利用 y_k 带来的新息修正我们的状态估计值. 即既要保证估计值在良好观测数据下的有效性,又要确保在出现异常观测数据时滤波程序具有良好抗扰性(resistance)而不发生崩溃(breakdown)[7].

下面引进状态估计的有界影响(BIF)滤波族. 可以看出它们具备性质 B4)和 B5).

3 有界影响滤波

设采样数据 $y_1,\cdots,y_k$ 是取自动态测量系统(1.1)的一组观测值,又设 $\{W_k(r)\}$ 为定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数阵序列,称由下式(3.1)给出的估计值 $\hat{x}_W(k|k)$ 为状态变量 x_k 的 W 滤波

$$\hat{x}_w(k|k) = \Phi_k\hat{x}_w(k-1|k-1) + W_k(\tilde{r}_k)\tilde{C}_{kk}^{-1/2}y(k|k-1). \tag{3.1}$$

其中 $$\tilde{r}_k = \tilde{y}(k|k-1)^{\tau}\tilde{C}_{kk}^{-1}\tilde{y}(k|k-1),\quad \hat{x}_w(0|0) = Ex_0.$$

定义 1 记 $W_k^{\tau}(r)W_k(r)$ 的最大特征值为 $\lambda_m^w(k,r)$. 若 $\{r\lambda_m^w(k,r)\}$ 关于 r 为有界的函数序列,则称由(3.1)定义的 $\hat{x}_W(k|k)$ 为 x_k 的有界影响滤波.

显然,当 $\{r\lambda_m^w(k,r),\in N\}$ 为有界序列时,序列 $\{W_k(\tilde{r}_k)\tilde{C}_{kk}^{-1/2}\tilde{y}(k|k-1)\}$ 也为有界的向量函数列. 因而,当 y_k 为极端异常数据时,它对滤波估计 $\hat{x}_W(k|k)$ 的影响可被控制在一定的界限内.

下面,我们分别就几种常见的情形讨论如何选取最佳的权函数序列 $\{W_k(r)\}$.

命题 1 设系统满足条件 A1)~A4),并且选取 $W_k(r)=K_k\tilde{C}_{kk}^{1/2}$(此处 K_k 为 Kalman 滤波的增益矩阵),则由(3.1)给出的 $\hat{x}_W(k|k)$ 为通常的 Kalman 滤波估计.

将(3.1)式和 Kalman 滤波递推公式进行对比,立知本命题成立. 由此命题可知,Kalman 滤波属于上述的 W 滤波族,但不是有界影响滤波.

命题 2 设系统满足 A1)~A4),$\eta_k\sim N(0,R_k(\eta))$,并记 $T_k\triangleq H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)H_k$. 选取函数阵序列

$$W_k(r) = [T_k^{-}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)\tilde{C}_{kk} - T_k^{-}H_k^{\tau}\varphi_k(r)]\tilde{C}_{kk}^{-1/2},\quad k\in N,$$

则当 T_k 可逆时,亦即 $T=T_k^{-1}$ 时,由(3.1)给出的估计为 x_k 的最小方差无偏滤波估计,式中

$$\varphi_k(r) = \frac{\int_0^{+\infty} N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))tP_w(t)e^{-rt/2}\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty} N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))P_w(t)e^{-rt/2}\mathrm{d}t}. \tag{3.3}$$

证 x_k 的基于观测 $\{y_1,\cdots,y_k\}$ 的最小方差无滤波估计为

$$\begin{aligned}\hat{x}_{m1}(k|k) \triangleq E(x_k|y^k) &= \int x_kf(x_k|y^k)\mathrm{d}x_k\\ &=\int x_kf(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k/f(y_k|y^{k-1})\\ &=\int x_kf_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k/f(y_k|y^{k-1}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中式(3.4)的成立利用到下述关系

$$f(x_k|y^k)f(y_k|y^{k-1}) = f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1}). \tag{3.5}$$

考虑到条件密度 $f(y_k|x_k,y^{k-1})=f_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)=f(y_k|x_k)$ 即可推知(3.5)式成立. 事实上,由分布的条件密度公式有

$$
\begin{aligned}
f(x_k|y^k)f(y_k|y^{k-1}) &= \frac{f(x_k,\ y^k)}{f(y^k)}\cdot\frac{f(y_k,\ y^{k-1})}{f(y^{k-1})}\\
&=\frac{f(y_k|x_k,\ y^{k-1})}{f(y^k)}\cdot\frac{f(y^k)}{f(y^{k-1})}f(x_k,\ y^{k-1})\\
&=f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1}).
\end{aligned}
$$

下面,再来计算 $\int x_kf_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k$.

由于 η_k 服从正态分布 $N(0,R_k(\eta))$,利用分部积分公式有

$$
\begin{aligned}
&\int f_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&=0-\int\frac{\partial}{\partial x_k}f_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&=-\int\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{(2\pi)^{-m/2}}{|R_k(\eta)|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(y_k-H_kx_k)^{\tau}R_k^{-1}(\eta)(y_k-H_kx_k)\right]\right\}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&=\int[H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)H_kx_k-H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)y_k]f_{\eta_k}(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&\overset{(3.5)}{=}T_k\int x_kf(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k-H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)y_k\int f(x_k|y^k)f(y_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&=T_k\int x_kf(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k-H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)y_kf(y_k|y^{k-1}).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

另一方面,由上式(3.6)的第二个等式得

$$
\begin{aligned}
\int f_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k &=-\int\frac{\partial}{\partial x_k}f_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&=H_k^{\tau}\int\frac{\partial}{\partial y_k}f_{\eta_k}(y_k-H_kx_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&=H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}\int f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\\
&\overset{(3.5)}{=}H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}f(y_k|y^{k-1}),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

因而,由式(3.6)和(3.7)有

$$
\int x_kf(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k=T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)y_kf(y_k|y^{k-1})+T_k^{-1}H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}f(y_k|y^{k-1}).
$$

将之代入式(3.4),得滤波估计

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{m1}(k|k) &=T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)y_k+T_k^{-1}H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}\log f(y_k|y^{k-1})\\
&=T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)E(y_k|y^{k-1})+T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)\tilde{y}(k|k-1)+T_k^{-1}H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}\log f(y_k|y^{k-1})\\
&=\Phi_k\hat{x}_{m1}(k-1|k-1)+T_k^{-1}H_k^{\tau}\{R_k^{-1}(\eta)\tilde{y}(k|k-1)+\frac{\partial}{\partial y_k}\log f(y_k|y^{k-1})\}.
\end{aligned}
$$

又因为

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\log f(y_k|y^{k-1})$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_k}\log\frac{\int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))N_{\tilde{y}(k|k-1)}(0,t^{-1}\tilde{C}_{kk})\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_k}\log\int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))\exp\left\{-\frac{t}{2}\tilde{y}(k|k-1)^{\tau}\tilde{C}_{kk}^{-1})\tilde{y}(k|k-1)\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-\int_0^{+\infty}tP_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))\exp\left\{-\frac{\tilde{r}_k t}{2}\right\}\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty}P_w(t)N_{y^{k-1}}(0,t^{-1}C(k-1))\exp\left\{-\frac{\tilde{r}_k t}{2}\right\}\mathrm{d}t}\tilde{C}_{kk}^{-1}\tilde{y}(k|k-1)$$

$$\overset{\text{记}}{=}-\varphi_k(\tilde{r}_k)\tilde{C}_{kk}^{-1}\tilde{y}(k|k-1). \tag{3.8}$$

故有下式成立

$$\hat{x}_{m1}(k|k)=\Phi_k\hat{x}_{m1}(k-1|k-1)+[T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)-T_k^{-1}H_k^{\tau}\tilde{C}_{kk}^{-1}\varphi_k(r_k)]\tilde{y}(k|k-1),$$

与式(3.1)进行比较,立知本命题得证.

命题 3 设系统满足 A1)~A4),状态的一步预报密度为 $f(x_k|y^{k-1})=N_{x_k}(\bar{x}(k|k-1),M(k|k-1))$. 如果选取

$$W_k(r)=M(k|k-1)H_k^{\tau}\tilde{C}_{kk}^{-1/2}\varphi_k(r),\quad (k\in N) \tag{3.9}$$

则由(3.1)给出的是 x_k 的最小方差无偏滤波.

证 仿照命题 2 的证明过程,有 x_k 的最小方差无偏滤波估计为

$$\hat{x}_{m2}(k|k)=E(x_k|y^k)=\int x_k f(x_k|y^k)\mathrm{d}x_k\overset{(3.5)}{=}\int x_k f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k/f(y_k|y^{k-1}).$$

又利用分部积分公式有

$$0=\int\frac{\partial}{\partial x_k}\{f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\}\mathrm{d}x_k$$

$$=\int\frac{\partial}{\partial x_k}f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k+\int f(y_k|x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k$$

$$=\int\frac{\partial}{\partial x_k}f(y_k-H_kx_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k+\int f(y_k|x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k$$

$$=-H_k^{\tau}\int\frac{\partial}{\partial y_k}f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k+\int f(y_k|x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k$$

$$\overset{(3.5)}{=}-H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}\left\{\int f(x_k|y^k)f(y_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k\right\}+\int f(y_k|x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k,$$

所以

$$H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}f(y_k|y^{k-1})=\int f(y_k|x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k, \tag{3.10}$$

$$\int f(y_k|x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k$$

$$=\int f(y_k|x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{(2\pi)^{-p/2}}{|M(k|k-1)|^{1/2}}\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_k-\bar{x}(k|k-1))^{\tau}M^{-1}(k|k-1)(x_k-\bar{x}(k|k-1))\right\}\right\}\mathrm{d}x_k$$

$$=\int M^{-1}(k|k-1)(\bar{x}(k|k-1)-x_k)f(y_k|x_k)f(x_k|y^{k-1})\mathrm{d}x_k$$

$$\overset{(3.5)}{=} M^{-1}(k|k-1)\bar{x}(k|k-1)f(y_k|y^{k-1})-M^{-1}(k|k-1)f(y_k|y^{k-1})\int x_k f(x_k|y^k)\mathrm{d}x_k$$

$$=[M^{-1}(k|k-1)\bar{x}(k|k-1)-M^{-1}(k|k-1)\hat{x}_{m2}(k|k)]f(y_k|y^{k-1}). \tag{3.11}$$

因此，由(3.10)和(3.11)式得

$$\hat{x}_{m2}(k|k)=\bar{x}(k|k-1)-M(k|k-1)H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}\log f(y_k|y^{k-1})$$

$$=E(x_k|y^{k-1})-M(k|k-1)H_k^{\tau}\frac{\partial}{\partial y_k}\log f(y_k|y^{k-1})$$

$$\overset{(3.8)}{=}\Phi_k\hat{x}_{m2}(k-1|k-1)+M(k|k-1)H_k^{\tau}\varphi_k(\tilde{r}_k)\widetilde{C}_{kk}^{-1}\tilde{y}(k|k-1).$$

与(3.1)式比较，立知本命题成立.

命题 2 和命题 3 进一步说明，由(3.1)定义的 W 滤波族是一个相当大的滤波族，几种常用的滤波都包含在这个滤波族中.

命题 4　如果条件 A1)～A4)满足，并选取初始值 $\hat{x}_w(0|0)=Ex_0$，则由(3.1)式定义的 W 滤波是无偏的.

证　由(3.1)式有 $E\hat{x}_w(k|k)=\Phi_k\hat{x}_w(k-1|k-1)+E\{W_k(\tilde{r}_k)\widetilde{C}_{kk}^{-1/2}\tilde{y}(k|k-1)\}$. 由论文[6]可知，$\tilde{y}(k|k-1)$在给定 y^{k-1}时为中心在原点的椭球对称分布，再考虑到矩阵 $\widetilde{C}_{kk}$的对称性. 利用对称区间上的奇函数的积分为 0 的性质，故有

$$E\{W_k(\tilde{r}_k)\widetilde{C}_{kk}^{-1/2}\tilde{y}(k|k-1)\}=E\{E\{W_k(\tilde{r}_k)\widetilde{C}_{kk}^{-1/2}\tilde{y}(k|k-1)|y^{k-1}\}\}=0.$$

故有

$$E\hat{x}_w(k|k)=\Phi_k E\hat{x}_w(k-1|k-1)=\prod_{j=0}^{k-1}\Phi_{k-j}E\hat{x}_w(0|0).$$

又因为

$$Ex_k=\prod_{j=0}^{k-1}\Phi_{k-j}Ex_0,\quad Ex_0=E\hat{x}_w(0|0),$$

所以，$\hat{x}_w(k|k)$为 x_k 的无偏滤波估计.

下面，我们讨论如何在不同的模型假定下选取合适的函数阵序列$\{W_k(r)\}$，使得到的滤波估计既具有性质 B4)和 B5)，又在一定意义下是最优的.

引进记号

$$\widetilde{M}_k(r)\triangleq T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)[\widetilde{C}_{kk}-R_k(\eta)\varphi_k(r)]\widetilde{C}_{kk}^{-1}[\widetilde{C}_{kk}-R_k(\eta)\varphi_k(r)]R_k^{-1}(\eta)H_kT_k^{-\tau},$$

并记它的最大特征值为 $\tilde{\lambda}(k,r)$.

设 $\widetilde{C}_{kk}$与 $R_k(\eta)$的相对合同矩阵为 Q_k，相对特征值为 λ_i^* $(i=1,2,\cdots,m)$. 即

$$\widetilde{C}_{kk}=Q_k^{\tau}Q_k,\quad R_k(\eta)=Q_k^{\tau}\mathrm{diag}(\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*)Q_k.$$

其中 diag(•)表示对角矩阵，则

$$\widetilde{M}_k(r)=T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta)Q_k^{\tau}\begin{bmatrix}1-\lambda_1^*\varphi_k(r) & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_m^*\varphi_k(r)\end{bmatrix}Q_k(Q_k^{-1}Q_k^{-\tau})$$

$$\cdot Q_k^{\tau}\begin{bmatrix}1-\lambda_1^*\varphi_k(r) & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_m^*\varphi_k(r)\end{bmatrix}Q_k(T_k^{-1}H_k^{\tau}R_k^{-1}(\eta))^{\tau}. \tag{3.12}$$

再引进记号 $\widetilde{Q}_k^\tau \triangleq T_k^{-1}H_k^\tau R_k^{-1}(\eta)Q_k^\tau$，$\widetilde{Q}_k^\tau\widetilde{Q}_k$ 的最大特征值为 λ_k，则由式(3.12)有

$$\widetilde{\lambda}(k,r) \leqslant \max\{(1-\lambda_i^*\varphi_k(r))^2,\ 1\leqslant i\leqslant m\}\lambda_k. \tag{3.13}$$

通过适当调整 Q_k，总可使下式成立

$$(1-\lambda_1^*\varphi_k(r))^2 \leqslant \cdots \leqslant (1-\lambda_m^*\varphi_k(r))^2. \tag{3.14}$$

首先，我们讨论当测量噪声服从正态分布时，如何实现在一定限制下 $\{W_k(r)\}$ 的最优选取．在命题 2 中，曾导出最小方差无偏滤波的函数阵列(当 T_k 可逆时)为

$$\begin{aligned} W_k(r) &= [T_k^{-1}H_k^\tau R_k^{-1}(\eta)\widetilde{C}_{kk} - T_k^{-1}H_k^\tau\varphi_k(r)]\widetilde{C}_{kk}^{-1/2} \\ &= T_k^{-1}H_k^\tau R_k^{-1}(\eta)(\widetilde{C}_{kk} - R_k(\eta)\varphi_k(r))\widetilde{C}_{kk}^{-1/2} \\ &= \widetilde{Q}_k\begin{bmatrix} 1-\lambda_1^*\varphi_k(r) & & \\ & \ddots & \\ & & 1-\lambda_m^*\varphi_k(r)\end{bmatrix} Q_k\widetilde{C}_{kk}^{-1/2}, \end{aligned}$$

并且 $W_k(r)W_k^\tau(r)=\widetilde{M}_k(r)$ 的最大特征值和 $W_k^\tau(r)W_k(r)$ 的最大特征值相等．因而，对照有界影响滤波的定义，我们可以合理地将注意力集中在下述的 W 函数阵列的集合 S_1 上，其中 S_1 定义为

$$S_1 = \{\{W_k(r),k\in N\}: W_k(r) = \widetilde{Q}_k^\tau\begin{bmatrix}\psi_{k,1}(r) & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_{k,m}(r)\end{bmatrix}Q_k\widetilde{C}_{kk}^{-1/2},$$

并且 $r\max\{\psi_{k,i}^2(r),\ 1\leqslant i\leqslant m\}\leqslant \widetilde{C}_k/\widetilde{\lambda}_k$，$\{\widetilde{C}_k\}$ 为预定的非负常数序列，而 $\psi_k(r)\triangleq(\psi_{k,1}(r),\cdots,\psi_{k,m}(r))^\tau$ 为 $[0,+\infty)$ 上定义的 m 维按段光滑的任意函数向量，$k\in N\}$．

定理 1 在命题 2 的条件下，基于集合 S_1 的最优有界影响滤波的 W 函数阵由下式确定

$$\psi_{k,i}(r) = \begin{cases} 1-\lambda_i^*\varphi_k(r), & 1\leqslant i\leqslant i_0, \\ 1-(x_{i-i_0}^*(k)+\lambda_i^*\varphi_k(r)), & i_0 < i\leqslant m. \end{cases} \tag{3.15}$$

也就是函数 $E\|x_w(k|k)-x_k\|^2$ 在集合 S_1 中的极小值点由式(3.15)确定．式中 $(x_1^*(k),\cdots,x_{m-i_0}^*(k))^\tau$ 为下述多元函数的条件极小值点

函数 $$\widetilde{f}(x_1,\cdots,x_{m-i_0}) = \mathrm{tr}\left\{\widetilde{Q}_k^\tau\begin{bmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_{m-i_0}\end{bmatrix}Q_k^{-\tau}\widetilde{y}(k|k-1)\widetilde{y}^\tau(k|k-1)\right.$$

$$\left.\cdot\widetilde{Q}_k^{-1}\begin{bmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_{m-i_0}\end{bmatrix}\widetilde{Q}_k\right\},$$

条件 $$r\max\{(1-\lambda_i^*\varphi_k(r)-x_{i-i_0})^2,\quad i=i_0+1,\cdots,m\}\leqslant \widetilde{C}_k/\lambda_k. \tag{3.16}$$

其中非负整数 i_0 由下述不等式确定

$$r(1-\lambda_{i_0}^*\varphi_k(r))^2\leqslant\widetilde{C}_k/\lambda_k\leqslant r(1-\lambda_{i_0+1}^*\varphi_k(r))^2. \tag{3.17}$$

证　沿用命题 2 及证明过程中所用记号有

$$\begin{aligned}E\|\hat{x}_w(k|k)-x_k\|^2&=E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m1}(k|k)\|^2+E\|\hat{x}_{m1}(k|k)-x_k\|^2\\&\quad+2E(x_k-\hat{x}_{m1}(k|k))^\tau(\hat{x}_{m1}(k|k)-x_w(k|k))\\&=E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m1}(k|k)\|^2+E\|\hat{x}_{m1}(k|k)-x_k\|^2\\&\quad+2E\{E\{(x_k-x_{m1}(k|k))^\tau|y^k\}(\hat{x}_{m1}(k|k)-x_w(k|k))\}\\&=E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m1}(k|k)\|^2+E\|\hat{x}_{m1}(k|k)-x_k\|^2.\end{aligned}$$

因此，只须证明由式(3.15)给出的 w 函数为 $E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m1}(k|k)\|^2$ 的在集合 S_1 中的极小值点即可.

事实上，由命题 2 有

$$\begin{aligned}&E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m1}(k|k)\|^2\\&=\mathrm{tr}\left\{\widetilde{Q}_k^\tau E\begin{bmatrix}1-\lambda_1^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-\psi_{k,1}(\tilde{r}_k)&&\\&\ddots&\\&&1-\lambda_m^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-\psi_{k,m}(\tilde{r}_k)\end{bmatrix}\widetilde{Q}_k^{-\tau}\tilde{y}(k|k-1)\right.\\&\quad\left.\cdot\tilde{y}^\tau(k|k-1)\widetilde{Q}_k^{-1}\begin{bmatrix}1-\lambda_1^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-\psi_{k,1}(\tilde{r}_k)&&\\&\ddots&\\&&1-\lambda_m^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-\psi_{k,m}(\tilde{r}_k)\end{bmatrix}\widetilde{Q}_k\right\}\\&\quad+\mathrm{tr}\{\Phi_kE(\hat{x}_w(k-1|k-1)-\hat{x}_{m1}(k-1|k-1))(\hat{x}_w(k-1|k-1)\\&\quad-\hat{x}_{m1}(k-1|k-1))\Phi_k^\tau\}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

其中式(3.18)的成立用到如下两个基本事实：

a) 矩阵的迹 $\mathrm{tr}\{AB\}=\mathrm{tr}\{BA\}$；

b) 由于$\{\tilde{y}(i|i-1)\}$的条件分布为中心在原点的椭球对称分布[6]，因而有下式成立

$$\mathrm{tr}\{\Phi_k(\hat{x}_w(k-1|k-1)-\hat{x}_{m1}(k-1|k-1))E\{\tilde{y}^\tau(k|k-1)\cdot Q_k^{-1}\begin{bmatrix}1-\lambda_1^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-\psi_{k,1}(\tilde{r}_k)&&\\&\ddots&\\&&1-\lambda_m^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-\psi_{k,m}(\tilde{r}_k)\end{bmatrix}\widetilde{Q}_k\Big|y^{k-1}\}\}=0.$$

由此可以看出式(3.18)等号右侧第一项的极小值点为

a) 当$(1-\lambda_i^*\varphi_k(\tilde{r}_k))^2\tilde{r}_k\leqslant\widetilde{C}_k/\lambda_k$时，可取

$$\psi_{k,i}(\tilde{r}_k)=1-\lambda_i^*\varphi_k(\tilde{r}_k); \tag{3.19}$$

b) 当$(1-\lambda_i^*\varphi_k(\tilde{r}_k))^2\tilde{r}_k>\widetilde{C}_k/\lambda_k$时，由(3.19)定义 $\psi_{k,i}(\tilde{r}_k)$超出了集合 S_1，因此改取 $1-\lambda_i^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-\psi_{k,i}(\tilde{r}_k)$为定理中条件极值(3.16)的极小值点 $x_{i-i_0}^*(k)$，$(i=i_0+1,\cdots,m)$. 故有

$$\psi_{k,i}(\tilde{r}_k)=1-\lambda_i^*\varphi_k(\tilde{r}_k)-x_{i-i_0}^*(k). \tag{3.20}$$

其中 i_0 由式(3.17)给定.

更一般地，对任意 $1\leqslant k'\leqslant k$ 均有类似上述的结论成立. 因而在 S_1 中，取(3.15)形式的 m 维函数向量序列$\{\psi_k(r)\}$可以保证 $E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m1}(k|k)\|^2$达极小值.　　证毕.

接着，再考虑如果状态变量的一步预测密度 $f(x_k|y^{k-1})=N_{x_k}(\bar{x}(k|k-1),M(k|k-1))$时，最优有界影响滤波的 W 函数的取法.

考虑到命题 3 的(3.9)式及有界影响滤波的定义，在上述的模型假定下，可以选取 W

函数族 $S_2=\{\{W_k(r),k\in N\}:W_k(r)=M(k|k-1)H_k^\tau\widetilde{C}_{kk}^{-1/2}\widetilde{\psi}_k(r),\quad r\lambda_m^W(k,r)\leqslant\widetilde{C}_k.$
其中 $\{\widetilde{C}_k\}$ 为预定的非负常数序列，$\widetilde{\psi}_k(r)$ 为 $[0,+\infty)$ 上定义的任意按段光滑实值函数 $(k\in N)\}$.

如果记 $\widetilde{\lambda}_m(k)$ 为矩阵 $M(k|k-1)H_k^\tau\widetilde{C}_{kk}^{-1}H_kM(k|k-1)$ 的最大特征值，则 $W_k^\tau(r)W_k(r)$ 的最大特征值 $\lambda_m^w(k,r)$ 为

$$\lambda_m^w(k,r)=\widetilde{\psi}_k^2(r)\widetilde{\lambda}_m(k). \tag{3.21}$$

定理 2 在命题 3 的条件下，基于 W 函数族 S_2 的最优有界影响滤波由下式确定

$$\widetilde{\psi}_k^2(r)=\begin{cases}\varphi_k(r), & r\leqslant\widetilde{C}_k/\{\widetilde{\lambda}_m(k)\varphi_k^2(r)\},\\ \{\widetilde{C}_k/[r\widetilde{\lambda}_m(k)]\}^{1/2}, & r>\widetilde{C}_k/\{\widetilde{\lambda}_m(k)\varphi_k^2(r)\}.\end{cases} \tag{3.22}$$

证 仿照定理 1 的证明过程，有下式成立

$$E\|\hat{x}_w(k|k)-x_k\|^2=E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m2}(k|k)\|^2+E\|\hat{x}_{m2}(k|k)-x_k\|^2.$$

故只须证明由(3.22)给定的函数序列在 S_2 中且使 $E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m2}(k|k)\|^2$ 达到极小.

事实上，由命题 3 有类似于(3.18)的结果

$$\begin{aligned}&E\|\hat{x}_w(k|k)-\hat{x}_{m2}(k|k)\|^2\\&=\mathrm{tr}\{\Phi_kE[\hat{x}_w(k-1|k-1)-\hat{x}_{m2}(k-1|k-1)][\hat{x}_w(k-1|k-1)\\&\quad-\hat{x}_{m2}(k-1|k-1)]^\tau\Phi_k^\tau\}+E\{\tilde{y}^\tau(k|k-1)\widetilde{C}_{kk}^{-1}H_k\\&\quad\cdot M^2(k|k-1)H_k^\tau\widetilde{C}_{kk}^{-1}\tilde{y}(k|k-1)[\widetilde{\psi}_k(\tilde{r}_k)-\varphi(\tilde{r}_k)]^2\}.\end{aligned}$$

由此可知，(3.22)给出的 $\{\widetilde{\psi}_k\}$ 使上式等号右侧的第二项达到极小. 类似定理 1 论证过程的分析，立知本定理成立.

有界影响滤波实质上是滤波器的有效性与抗异常值能力之间的一个折衷. 上述的定理 1 和 2 分别在不同的模型假定下导出了最优有界影响滤波的 W 函数形式. 但在工程应用中，有时为简便起见可采用如下形式的 W 函数，也能达到良好的抗扰性能.

i) Huber 型函数列

$$W_k^{\mathrm{Hu}}(r)=\begin{cases}1, & r\leqslant C_k,\\0, & r>C_k.\end{cases}$$

ii) Hample 型函数列

$$W_k^{\mathrm{Ha}}(r)=\begin{cases}1, & r\leqslant C_k,\\\left\{\dfrac{C_k}{r}\right\}^{1/2}, & r>C_k.\end{cases}$$

iii) Redescending 型函数列

$$W_k^{\mathrm{Re}}(r)=\begin{cases}1, & r\leqslant C_{1,k}\\\dfrac{C_{1,k}}{\sqrt{r}}+\dfrac{C_{1,k}}{C_{2,k}-C_{1,k}}\left(\dfrac{C_{1,k}}{\sqrt{r}}-1\right), & C_{1,k}<r<C_{2,k},\\0, & r>C_{2,k}.\end{cases}$$

其中 C_k, $C_{1,k}$, $C_{2,k}$ 为经验选取的非负常数 $(k\in N)$.

本文作者曾利用 $C_k=3$ 的 Hample 型函数列下的有界影响滤波器对某次飞行器试验任务数据进行过实际处理. 结果说明，对包含异常数据的段落，有界影响滤波值明显优于 Kalman 滤波估计值. 因限于篇幅，详细应用情况拟另文给出.

致谢 本文作为硕士论文[2]的一部分，承蒙张尧庭教授和施仁杰教授审阅和指教，比利时稳健统计专家 Rousseeuw 教授阅读过本文的英译手稿. 作者谨此致以衷心感谢.

参 考 文 献

[1] 范金城. 随机过程与时间序列分析. 西安：西安交通大学出版社，1987，29—82

[2] 胡峰. 动态测量系统的抗扰性滤波. 西安：西安交通大学硕士学位论文. 1989，21—36

[3] 韩崇昭等. 随机系统理论. 西安：西安交通大学出版社，1987，150—215

[4] Martin-Mintz. Robust Filtering and Prediction for Linear System with Uncertain Dynamics——A Game Theoretic Approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1983, AC-28

[5] Martin, D.. Robust Methods for Time Series, Applied Time Series. Academic Press Inc. 1980, 685—759

[6] Chu Kaicheng. Estimation and Decision for Linear Systems with Elliptical Random Process. IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, AC-18;

[7] Hample, F. R. et al.. Robust Statistics, the Approach Based on Influence Functions. John Wiley & Sons, Inc., 1986, 4—71

[8] 范金城，胡峰. 周期性测量数据的三角多项式滤波. 广州：中国现场统计第五届学术年会论文集，1991，208—211

[9] Lasman, L. L.. Best Estimate of Trajectory. RCA Mathematical Services Technical Memo., America BETY$_2$, 1962, 62—67

[10] Brown, D.. Study of the Feasibility of Rocket and Satellite Approaches to the Calibration of Tracking System. Princeton, New Jersey, No. AD425480

The Bounded Influence Filters for Dynamic-Measurement Systems

HU Fong

(Xi'an Satellite Control Center·Xi'an, 710043, PRC)

FAN Jincheng

(Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University·Xi'an 710049, PRC)

Abstract: How to overcome the sensitivity of the Kalman filters to outliers in samples? Much attention is paid to, for this question, in resistance analysis of state estimator. Based on an innovation process, a quite large filter class, which is called W-filter class, is reasonably constructed in this paper. In order to control breakdown influence of outliers to state filtering, we mianly deal with a bounded-influence subset, and find out the optimal ψ-functions, under some constraints about the bound of influences.

Key words: dynamic measurement systems; outliers; resistance analysis; filter

本文作者简介

胡 峰 1964年生. 西安卫星测控中心工程师. 1989 年获西安交通大学硕士学位. 研究方向为现代时间序列分析与随机控制理论. 发表学术论文 15 篇. 感兴趣的领域有随机系统的建模，辨识与随机信号处理.

范金城 1937 年生. 西安交通大学数学系副教授. 研究方向为数理统计与时间序列分析. 现任时间序列专业委员会委员，西安市现场统计协会副理事长，3 部全国性学刊编委。发表论文近 30 篇，涉及非线性序列，稳健统计，随机加权，及系统辨识等.