第 10 卷第 1 期
1993 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 1
Feb., 1993

线性二次型指标下的最优输出反馈问题

陈善本
(哈尔滨工业大学控制工程系,150006)

摘要：本文研究了线性二次型指标下的最优输出反馈问题. 根据系统参数，在二次型指标中适当选择状态加权矩阵 Q 可以将 LQ 问题的状态反馈解表成输出反馈的形式. 文中给出了这种输出反馈解存在的充分性条件.

关键词：LQ 问题；最优输出反馈

1 引 言

考虑线性二次最优控制问题，系统设为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$y = Cx. \tag{2}$$

这里状态 $x \in \mathrm{R}^n$，控制 $u \in \mathrm{R}^m$，输出 $y \in \mathrm{R}^l$，(A, B, C) 为相容定常矩阵. 指标为

$$J = \min \int_0^\infty (x'Qx + u'u)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

周知，当 $Q = Q' \geqslant 0$，(A, B) 可控，则有唯一的最优状态反馈解

$$u^* = -B'Px. \tag{4}$$

式中 $P = P' \geqslant 0$ 满足 Riccati 方程

$$PA + A'P + Q - PBB'P = 0, \tag{5}$$

并使闭环系统稳定，即 $\mathrm{Re}\lambda(A - BB'P) < 0$.

如果状态不能或不易测得时，一个自然的问题是若能将状态反馈表成输出反馈的形式，即

$$u^* = -B'Px = -FCx = -Fy, \tag{6}$$

则是最理想的结果. 但是，在一般情况下，$B'P$ 不一定能表成 FC，为此，许多学者多年来在这个问题上作了大量的探索和努力，但由于一般性问题求解的困难性，至今尚无明确的存在可解的简便应用结论，从而使这一问题成为控制理论界众所关注的难题之一.

观察(5)式 Riccati 方程，我们看到：若 A, B 确定后，(5)式解 P 是随着 Q 的不同选择而变化的. Q 是二次型指标中的状态加权阵. 从系统综合的观点看，Q 是可以根据我们的要求选择的. 已有结论表明，Q 的选择可以配置系统闭环极点. 另外，若选 Q 使 $(Q^{1/2}, A)$ 可观测，则可使 Riccati 方程解 $P > 0$，说明 Q 的选择能影响 P 的秩. 而将 $B'P$ 表成 FC 的要求也是与矩阵的秩直接相关的. 因此，我们自然想到：能否有这样一种 Q 的选择，使得 Riccati 方程解满足

本文于1991年6月3日收到. 1992年4月13日收到修改稿.

$$B'P = FC. \tag{7}$$

如果这样的选择可行，那么最优输出反馈问题也就有了确定的解，这就是本文的基本出发点.

2 问题提法

本文对 LQ 指标下最优输出反馈问题的提法如下：

对系统(1),(2),在指标(3)中寻求一个 $Q=Q'>0$ 使得可将 LQ 问题(1)～(3)的最优状态反馈解表成输出反馈的形式 $u^*=-Fy$. 即要求 Riccati 方程(5)有解 P,使(7)式有解 F. 问题的求解要求是：

1) 给出 Q 的存在条件(用 A,B,C 表出)；

2) 给出 Q 的构造(用 A,B,C 表出).

3 主要结果

考虑输入输出维数相等，即 $m=l$ 的情况，我们有结论如下.

定理 3.1 假定

1° 系统(1),(2)中(A,B)可控,(C,A)可观；

2° $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$. 即 A 渐近稳定. 且传递函数矩阵 $H(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 正实. 则必存在可由系统参数(A,B,C)确定的实对称正定阵 $\tilde{P}$ 和非负定阵 $\tilde{Q}$,当在指标(3)中选

$$Q=\tilde{Q}+\tilde{P}BB'\tilde{P}$$

时,Riccati 方程(5)有解 $P^*=\tilde{P}$,使得

$$B'P^*=B'\tilde{P}=C.$$

即最优输出反馈为

$$u^*=-y.$$

若对任意实数 $k\neq0$,在指标(3)中选 $Q=Q_k=k^2(\tilde{Q}+k^2\tilde{P}BB'\tilde{P})$时,则对应的 Riccati 方程(5)有解 $P^*=P_k$ 满足

$$B'P_k=k^2B'\tilde{P}=k^2C.$$

即有最优输出反馈控制

$$u^*=-k^2y.$$

证 为证定理3.1,先引述文献[1]中有关结论如下：

引理 1([1]中引理6) 令 $n\times n$ 阵 $Z(s)$正实,且设 $Z(s)+Z'(-s)$几乎处处有秩 r,则存在 $r\times n$ 阵 $W(s)$使 $Z(s)+Z'(-s)=W'(-s)W(s)$分解成立,且

1° 若 $Z(s)$元素在 $\mathrm{Re}s>0$解析,$W(s)$元素亦在 $\mathrm{Re}s>0$解析；

2° 对 $\mathrm{Re}s>0$, $\mathrm{rank}W(s)=r$.

引理 2([1]中引理8) 令 $Z(s)$的一个最小实现为(G,K,J),且 $Z(\infty)=0$. Z 与 W 的关系由引理1给定,则 $W(s)$有一个最小实现$(G,K,\tilde{J})$.

引理 3([1]中定理1) 令 $Z(s)$为实有理函数矩阵,且 $Z(\infty)=0$,Z 仅在 $\mathrm{Re}s>0$内有极点,Z 与 W 的关系由引理1给定. 且 W 的最小实现为$(G,K,\tilde{J})$,Z 的最小实现为(G,K,J),则 $Z(s)$为正实的充要条件是存在一个正定阵 U 使下式成立

$$UG+G'U=-\tilde{J}'\tilde{J},$$

$$UK=J' \quad 或 \quad K'U=J.$$

有了上述结论,可对定理3.1作如下几步推证：

1) 依引理1和引理2可知系统(1),(2)的传递阵 $H(s)$满足引理条件且有如下分解

$$H(s)+H'(-s)\triangleq N'(-s)N(s).$$

记 $N(s)$ 的最小实现为 $(A,B,\widetilde{C})$，依引理3，则定理3.1中假定1°和2°等价于存在一个正定阵 $\widetilde{P}$ 和半正定阵 $\widetilde{Q}=\widetilde{C}'\widetilde{C}$ 使

$$\widetilde{P}A+A'\widetilde{P}=-\widetilde{Q}=-\widetilde{C}'\widetilde{C},\tag{8}$$

$$\widetilde{P}B=C' \quad 或 \quad B'\widetilde{P}=C.\tag{9}$$

由于 $(A,B,\widetilde{C})$ 是 $N(s)$ 的最小实现，故 $(\widetilde{C},A)$ 可观. 对由此实现确定的 $\widetilde{C},\widetilde{P}$ 可由(8)唯一确定为

$$\widetilde{P}=\int_0^\infty e^{A't}\widetilde{C}'\widetilde{C}e^{At}\mathrm{d}t>0.\tag{10}$$

由于 $\widetilde{C}'\widetilde{C}$ 是由 $H(s)$ 的系数阵 (A,B,C) 决定，因此 $\widetilde{P}$ 亦由 (A,B,C) 决定.

2) 再考虑(1)～(6)的最优控制问题

将最优控制(4)中 P 要满足的 Riccati 方程(5)与(8)比较，若在(5)中取

$$Q=\widetilde{Q}+PBB'P,$$

则(5)变为

$$PA+A'P=-\widetilde{Q}=-\widetilde{C}'\widetilde{C}.\tag{11}$$

又因 $(\widetilde{C},A)$ 可观，上式亦有唯一解为

$$P=\int_0^\infty e^{A't}\widetilde{C}'\widetilde{C}e^{At}\mathrm{d}t=\widetilde{P}>0,$$

因此，若在(5)中取

$$Q=\widetilde{Q}+\widetilde{P}BB'\widetilde{P},\tag{12}$$

即(5)式成为

$$PA+A'P+\widetilde{Q}+\widetilde{P}BB'\widetilde{P}-PBB'P=0.\tag{13}$$

显见 $P=\widetilde{P}$ 满足(13)，因此，当在指标(3)中选取

$$Q=\widetilde{Q}+\widetilde{P}BB'\widetilde{P}=\widetilde{C}'\widetilde{C}+\left(\int_0^\infty e^{A't}\widetilde{C}'\widetilde{C}e^{At}\mathrm{d}t\right)BB'\left(\int_0^\infty e^{A't}\widetilde{C}'\widetilde{C}e^{At}\mathrm{d}t\right),\tag{14}$$

则(5)式有解 $P^*=\widetilde{P}$.

又由(9)，　$\widetilde{P}B=PB=C$ 　或　 $B'P=B'\widetilde{P}=C$.

即(6)式可表为　$u^*=-B'Px=-B'\widetilde{P}x=-Cx=-y$,

可见为单位输出负反馈.

(14)式表明：由系统参数 (A,B,C) 可决定 Q，因 $\widetilde{C}$ 是由 (A,B,C) 决定.

3) 对任意实数 $k\neq0$，由(8)式两边同乘以 k^2，若视为取

$$\widetilde{Q}_k=(k\widetilde{C})'(k\widetilde{C})=k^2\widetilde{C}'\widetilde{C}=k^2\widetilde{Q},\tag{15}$$

相当于方程　$\widetilde{P}_kA+A'\widetilde{P}_k=-\widetilde{Q}_k=-k^2\widetilde{Q}$,

则对应于 $\widetilde{Q}_k$ 的解 $\widetilde{P}_k$ 为　$\widetilde{P}_k=k^2\widetilde{P}$,

$\widetilde{P}$ 仍然由(10)决定，且有

$$B'\widetilde{P}_k=k^2C,\tag{16}$$

因此，若在指标(3)中选取

$$Q=Q_k\triangleq\widetilde{Q}_k+\widetilde{P}_kBB'\widetilde{P}_k=k^2(\widetilde{Q}+k^2\widetilde{P}BB'\widetilde{P}),\tag{17}$$

则方程(5)有对应解为　$P=\widetilde{P}_k=k^2\widetilde{P}$,

从而最优控制为

$$u^* = -B'\tilde{P}_k x = -k^2 B'\tilde{P}x = -k^2 Cx = -k^2 y.$$

定理证毕.

下面对 Q 的另一种选择给出定理3.1的推论.

推理 3.1.1 若定理3.1的假定条件保持,则必存在可由系统(1),(2)的参数阵(A,B,C)确定的正定阵 $\overline{P}$ 和半正定阵 $\overline{Q}$,当在指标(3)中选取

$$Q = \overline{P}(\overline{Q} + BB')\overline{P} \tag{18}$$

时,(5)式有解 $P^* = \overline{P}$ 使 $B'P^* = B'\overline{P} = C.$

即有最优输出反馈为 $u^* = -y.$

若对任意实数 $\bar{k} \neq 0$,在指标(3)中选取

$$Q = Q_k = \bar{k}^{-2}\overline{P}(\overline{Q} + \bar{k}^{-2}BB')\overline{P}, \tag{19}$$

则对应(5)式中 $Q=Q_k$ 的解为 $P^* = P_k = \bar{k}^{-2}\overline{P},$

即有

$$B'P^* = B'P_k = \bar{k}^{-2}B'\overline{P} = \bar{k}^{-2}C. \tag{20}$$

最优输出反馈控制为 $u_k^* = -\bar{k}^{-2}y.$

证　可参考定理3.1的证明方法. 此处从略.

4　推广结果

下面考虑输入输出维数不同,即 $m \neq l$ 的情况,我们有结论如下

定理 4.1 对系统(1),(2),设(A,B)可控,且 $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$,若存在一个 $m \times l$ 阵 F 使

1° 传递阵 $H_F(s) = FC(sI-A)^{-1}B$ 正实; 2° (FC,A)可观测.

则必存在可由(A,B,FC)确定的正定阵 $\tilde{P}_F$ 和半正定阵 $\tilde{Q}_F$,当在(3)中选取

$$Q = Q_F \triangleq \tilde{Q}_F + \tilde{P}_F BB'\tilde{P}_F \tag{21}$$

时,对应(5)式有解 $P^* = \tilde{P}_F$ 使 $B'P^* = B'\tilde{P}_F = FC,$

即有最优输出反馈控制 $u^* = -Fy.$

对任意实数 $k \neq 0$,若在(3)中选取

$$Q = Q_{Fk} \triangleq k^2(\tilde{Q}_F + k^2\tilde{P}_F BB'\tilde{P}_F), \tag{22}$$

则对应(5) 的解为 $P^* = P_{Fk} = k^2\tilde{P}_F,$

即有 $B'P^* = k^2B'\tilde{P}_F = k^2FC,$

最优输出反馈控制为

$$u^* = -k^2Fy. \tag{23}$$

证　与定理3.1类同证法,只须用 FC 取代定理3.1中 C 的有关推证结论即可. 关于 $\tilde{Q}_F, \tilde{P}_F$ 的表达式说明如下:

由分解式

$$H_F(s) + H_F'(-s) \triangleq N_F(-s)N_F(s),$$

$N_F(s)$的最小实现记为$(A,B,\tilde{C}_F)$,则

$$\tilde{Q}_F = \tilde{C}_F'\tilde{C}_F. \tag{24}$$

而

$$\tilde{P}_F = \int_0^\infty e^{A't}\tilde{C}_F'\tilde{C}_F e^{At}\mathrm{d}t > 0. \tag{25}$$

由于 $\tilde{C}_F$ 可由 $N_F(s)$决定,也即可由(A,B,FC)决定,所以 $\tilde{Q}_F, \tilde{P}_F$ 及 Q_F, Q_{Fk}均可由(A,B,FC)

决定. 其它证明从略.

关于 Q 的另一选择,可有定理4.1的推论.

推论 4.1.1 假定定理4.1的条件保持,则必存在可由 (A,B,FC) 确定的 $\overline{P}_F=\overline{P}_F'>0$ 和 $\overline{Q}_F=\overline{Q}_F'>0$,当在(3)中选取

$$Q=Q_F\triangleq\widetilde{P}_F(\overline{Q}_F+BB')\overline{P}_F \tag{26}$$

时,(5)式有解 $P^*=\overline{P}_F$,使得

$$B'P^*=B'\overline{P}_F=FC. \tag{27}$$

即有最优输出反馈控制 $u^*=-Fy$.

对任意实数 $\bar{k}\neq0$,当在(3)中选取

$$Q=Q_{Fk}=\bar{k}^{-2}\overline{P}_F(\widetilde{Q}_F+\bar{k}^{-2}BB')\overline{P}_F, \tag{28}$$

对应(5)式有解 $P^*=\bar{k}^{-2}\overline{P}_F$.

即有

$$B'P^*=\bar{k}^{-2}B'\overline{P}_F=\bar{k}^{-2}FC. \tag{29}$$

最优输出反馈控制为 $u^*=-\bar{k}^{-2}Fy$.

证 与定理4.1和推论3.1的证明方法类同. 关于 $\overline{Q}_F,\overline{P}_F$ 表达式说明如下:

由分解式 $H_F'(s)+H_F(-s)\triangleq\overline{N}_F'(s)\overline{N}_F(-s)$,

$\overline{N}_F(s)$的最小实现为$(A',(FC)',\overline{B}_F)$,则

$$\overline{Q}_F=\overline{B}_F\overline{B}_F', \tag{30}$$

而

$$\widetilde{P}_F=[\int_0^\infty e^{At}\overline{B}_F\overline{B}_F'e^{A't}\mathrm{d}t>0. \tag{31}$$

式中 $\overline{B}_F$ 由 (A,B,FC) 决定. 因此 $\overline{Q}_F,\overline{P}_F$ 亦由 (A,B,FC) 决定. 其它证明从略.

由本节的推广结果可知:在定理3.1和推论3.1中亦可考虑存在 $m\times m$ 阵 F 使有关正实性,(FC,A) 可观性成立条件下给出最优输出反馈控制 $u^*=-Fy$,这样就可使在指标(3)中 Q 有较大选择范围,以满足较多的系统设计要求.

另外,对 $m\neq l$ 的情况,若存在一个 $m\times l$ 阵 E 使

$$H_k(s)=C(sI-A)^{-1}BE$$

正实,且 (A,BE) 可控,(C,A) 可观,则亦可设计出一个最优输出反馈控制系统,这两种情况下虽然 E,F 可能是不同的,但是正实性意义下是等价的.

5 结束语

本文研究了在 LQ 指标下线性定常系统的最优输出反馈控制问题. 其思想是根据系统参数阵 (A,B,C) 在指标中选择适当的状态加权阵 Q 使得最优状态反馈解可表为输出反馈的形式. 文中给出了基于正实性条件下的最优静态输出反馈存在的一种充分性条件. 这个结论从数学上可以认为是找到了 Riccati 方程与 Lyapunov 方程的一个契合点;从控制系统的观点看,则可认为是找到了 LQ 最优控制问题与系统镇定问题的一个契合点. 这也许可以被认为是本文对 LQ 指标下最优输出反馈问题研究的一个技巧性意义.

关于本文结果在实际系统设计中的应用可作如下粗略探讨:

1) 有些系统可通过校正或 F 阵的选择使之成为正实系统满足定理条件;

2) F 阵元素的选择可改变对输出变量的控制加权效果;

3) F 阵和常数 $k(\bar{k})$ 的选择可将闭环极点适当改变. k 值明显地反映了系统的负反馈程度,实际上直接影响系统的快速调节性能. 另外还可以在状态与控制的加权方面作适当调整.

当然,这些参数的具体确定方法常常要根据系统性能的具体要求作一些试探求解. 另外,若系统不满足或不便作成满足本文结论要求的条件时,在应用中也有许多求取次优控制解的算法可以考虑,本文限于篇幅不便作深入讨论了.

参考文献

[1] Anderson, B. D. O.. A System Theory Criterion for Positive Real Matrices. J. SIAM Contrl, 1967, 5:171—182

[2] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Linear Optimal Control. Prentice-Hall, 1971

[3] Zheng, D. Z.. Some New Results on Optimal and Suboptimal Regulators of the LQ Problem with Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34:555—560

[4] 须田信英(日)等著,曾长修译. 自动控制中的矩阵理论. 北京:科学出版社,1979

The Optimal Output Feedback Problem under the LQ Index

CHEN Shanben

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology·Harbin, 150006, PRC)

Abstract: This paper is concerned with the problem of the optimal output feedback under the LQ index. Choosing the proper state weight matrix Q in the LQ index by the system parameters, we can express the state feedback solution of the LQ problem in the form of the output feedback. The paper presents a sufficient condition for the existence of the optimal output feedback solution of the LQ problem.

Key words: LQ problem; optimal output feedback

本文作者简介

陈善本　1956年生. 1978年3月考入大连铁道学院自动化专业,获学士学位. 曾任教于上海铁道学院. 1987年3月和1991年3月获哈尔滨工业大学控制理论及应用专业硕士、博士学位. 现任教于海军航空工程学院. 主要研究兴趣为鲁棒控制,最优控制,系统辨识和自适应控制等领域.