第 10 卷第 1 期
1993 年 2 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 10, No. 1
Feb., 1993

广义控制系统的强能控性与强能观性*

王殿辉 谢绪恺
(东北工学院数学系·沈阳,110006)

摘要：本文考虑正则广义控制系统的强能控性与强能观性,在不分解原系统的情况下,用原系统参数给出了一些新的判定条件.

关键词：广义控制系统;强能控性;强能观性

在广义控制系统的理论研究中,强能控性(S-C)与强能观性(S-O)这些重要概念首先由 Verghese[1]提出,并在文[1～5]中得到了进一步的讨论,获得了各种不同形式的判据.本文将在不分解原系统的情况下,用原系统参数给出一些新的判定条件.

1 准备知识

考虑正则广义控制系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1a}$$

$$y = Cx. \tag{1b}$$

其中 $E,A\in \mathrm{R}^{n\times n}$,$B\in \mathrm{R}^{n\times m}$,$C\in \mathrm{R}^{l\times n}$,$E$ 为奇异矩阵且有 $\det(sE-A)\neq 0$(即系统是正则的).

记 $\sigma(E,A)=\{s:\det(sE-A)=0\}$, $r=\deg\det(sE-A)$.

命题 1[7] 若实数 $\alpha\notin\sigma(E,A)$,则有

1) 矩阵$(\alpha-A)^{-1}E$ 的非零特征值的个数(包括重数)等于 r;

2) 多项式 $\det(sE-A)$的根与$(\alpha E-A)^{-1}E$ 的非零特征值之间存在 1-1 对应关系,即有 $\lambda\leftrightarrow(\alpha-\lambda)^{-1}$.

令 $\mathrm{R}_s,\mathrm{R}_f$ 分别为联系$(\alpha E-A)^{-1}E$ 的非零及零特征子空间,J_s,J_f 分别表示映射$(\alpha E-A)^{-1}E$ 在子空间 R_s 及 R_f 中的限制,P 表示沿子空间 R_f 在子空间 R_s 上的自然投影,$G_s=P(\alpha E-A)^{-1}B$,$G_f=(I-P)(\alpha E-A)^{-1}B$,$C_s,C_f$ 分别表示映射 C 在子空间 $\mathrm{R}_s,\mathrm{R}_f$ 中的限制.容易证明,$\mathrm{R}_s,\mathrm{R}_f$ 都是$(\alpha E-A)^{-1}A$-不变子空间,且$(\alpha E-A)^{-1}A$ 在 $\mathrm{R}_s,\mathrm{R}_f$ 中的限制分别为 αJ_s-I_s 及 αJ_f-I_f,其中 I,I_s,I_f 分别为 $\mathrm{R}^n,\mathrm{R}_s,\mathrm{R}_f$ 中的单位映射.

取实数 $\alpha\notin\sigma(E,A)$,在(1a)两边左乘以$(\alpha E-A)^{-1}$,则系统(1)经适当的坐标变换 $x=\mathrm{T}[x_s^{\mathrm{T}},x_f^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$分解为如下两个子系统:

$$\dot{x}_s = (\alpha I_s - J_s^{-1})x_s + J_s^{-1}G_s u, \tag{2a}$$

$$y_s = C_s x_s, \tag{2b}$$

及

$$(\alpha J_f - I_f)^{-1}J_f\dot{x}_f = x_f + (\alpha J_f - I_f)^{-1}G_f u, \tag{3a}$$

$$y_f = C_f x_f. \tag{3b}$$

---

* 国家自然科学基金资助.
本文于1991年6月8日收到.

其中 $x_s\in\mathrm{R}_s$, $x_f\in\mathrm{R}_f$, $y_s+y_f=y$；不失一般性，可设 J_f 为 Jordan 块矩阵，从而 $(\alpha J_f-I_f)^{-1}J_f$ 为与 J_f 具有相同形式的 Jordan 块矩阵.

子系统(2),(3)分别称为广义系统(1)的慢子系统和快子系统. 可以证明，Cobb[6]基于矩阵束的 Kronecker 标准型得到的分解系统与上面得到的分解系统是完全一致的. 为了简便起见，记

$$E_a=(\alpha E-A)^{-1}E,\quad B_a=(\alpha E-A)^{-1}B,\quad A_s=\alpha I_s-J_s^{-1},$$
$$A_f=(\alpha J_f-I_f)^{-1}J_f,\quad B_s=J_s^{-1}G_s,\quad B_f=(\alpha J_f-I_f)^{-1}G_f.$$

幂零指数 $\mathrm{Ind}(A_f)=q$, $S_1\overset{\mathrm{T}}{=}S_2$ 表示子空间 S_2 由子空间 S_1 经坐标变换 T 后得到.

2 主要结果

定义 1 若子系统(2)是指数模式能控的(R-C)且子系统(3)是脉冲模式能控的(I-C)，则称广义系统(1)是强能控的(S-C).

用 S_M, T_M 分别表示矩阵 $M\in\mathrm{R}^{n\times n}$的最大左、右化零阵，即它们满足

$$S_MM=MT_M=0, \tag{4}$$
$$\mathrm{rank}S_M=\mathrm{rank}T_M=n-\mathrm{rank}M. \tag{5}$$

定理 1 下列叙述相互等价

1) 系统(1)是 S-C 的；

2) $\mathrm{rank}[sI-E_a,\ B_a,\ T_{Ea}]=n,\forall\ s\in\mathscr{C}$；

3) $\mathrm{rank}[T_{Ea},B_a,E_aB_a,\cdots,E_a^{n-1}B_a]=n$；

4) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\mathrm{Im}E_a^iB_a+\ker E_a=\mathrm{R}^n$；

5) 对任意给定的 $\mathrm{rank}E$ 次多项式 $P(s)$，存在线性映射 K，使 $\det(sE-A-BK)=P(s)$.

证 1)⇔2)：由[11]中的定理 8 知，系统(1)是 I-C 的充要条件为

$$\mathrm{rank}[E,\ AT_E,\ B]=n, \tag{6}$$

易证上式(6)等价于

$$\mathrm{rank}[sI-E_a,\ B_a,\ T_{Ea}]_{s=0}=n, \tag{7}$$

于是只需要证明系统(1)是 R-C 的充要条件为

$$\mathrm{rank}[sI-E_a,\ B_a,\ T_{Ea}]=n,\quad\forall\ s\in\sigma(E_a)-\{0\}. \tag{8}$$

其中 $\sigma(E_a)=\{s:\det(sI-E_a)=0\}$. 显然，式(8)等价于

$$\mathrm{rank}[(\alpha-s^{-1})E-A,\ B]=n,\quad\forall\ s\in\sigma(E_a)-\{0\}. \tag{9}$$

由命题 1 知，$\alpha-s^{-1}\in\sigma(E,\ A)$，故知式(8)又等价于

$$\mathrm{rank}[sE-A,\ B]=n,\quad\forall\ s\in\sigma(E,\ A). \tag{10}$$

从而由[8]中的定理 7 知，式(8)等价于系统(1)是 R-C 的；

1)⇔4)⇔3)：注意到 $\sum\limits_{i=0}^{r-1}\mathrm{Im}A_s^iB_s=\sum\limits_{i=0}^{r-1}\mathrm{Im}J_s^iG_s$, $\sum\limits_{i=0}^{q-1}\mathrm{Im}A_f^iB_f=\sum\limits_{i=0}^{q-1}\mathrm{Im}J_f^iG_f$, $\ker E_a=0\oplus\ker A_f$,

故有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Im}E_a^iB_a+\ker E_a\overset{\mathrm{T}}{=}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{Im}(J_s^iG_s\oplus J_f^iG_f)+(0\oplus\ker A_f)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \mathrm{Im} A_s^i B_s \oplus \left(\sum_{i=0}^{q-1} \mathrm{Im} A_f^i B_f + \ker A_f \right), \tag{11}$$

于是 4)成立的充要条件为

$$\sum_{i=0}^{r-1} \mathrm{Im} A_s^i B_s = \mathrm{R}_s \tag{12}$$

和

$$\sum_{i=0}^{q-1} \mathrm{Im} A_f^i + \ker A_f = \mathrm{R}_f. \tag{13}$$

由[5,6,8]中的有关结果即知结论成立. 3)⇔4)显然.

1)⇔5):若系统(1)是 S-C 的,则由[6]中的定理 4 知,存在线性映射 K_1,使

$$\deg \det(sE - A - BK_1) = \mathrm{rank} E. \tag{14}$$

又对任何复数 s 显然成立

$$\mathrm{rank}[sE - A - BK_1,\ B] = \mathrm{rank}[sE - A,\ B] = n, \tag{15}$$

故知系统$(E, A+BK_1, B)$是 R-C 的,于是由[10]中的极点配置定理知,对任意给定的 $\mathrm{rank}E$ 次多项式 $P(s)$,存在线性映射 K_2,使

$$\det(sE - A - BK_1 - BK_2) = P(s). \tag{16}$$

反之,由 5)易知系统(1)是 I-C 的,又由 $P(s)$的任意性,故知 $\sigma(E,A)$是可以通过状态反馈任意配置的,即有系统(1)又是 R-C 的,从而系统(1)是 S-C 的.

定义 2　若子系统(2)是指数模式能观的(R-O)且子系统(3)是脉冲模式能观的(I-O),则称广义系统(1)是强能观的(S-O).

定理 2　下列叙述相互等价

1) 系统(1)是 S-O 的;

2) $\mathrm{rank}[(sI-E_a)^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, S_{E_a}^{\mathrm{T}}]=n,\quad \forall\ s\in\mathscr{C}$;

3) $\mathrm{rank}[S_{E_a}^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, E_a^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}, \cdots, (E_a^{\mathrm{T}})^{n-1}C^{\mathrm{T}}]=n$;

4) $\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CE_a^i \cap \mathrm{Im} E_a = 0$;

5) 对任意给定的 $\mathrm{rank}E$ 次多项式 $Q(s)$,存在线性映射 L,使 $\det(sE-A-LC)=Q(s)$.

证　由[6]中的对偶定理即得.

应用矩阵的 Drazin 逆[9],由以上定理 1 中 4)的证明过程不难得到如下

定理 3　1) 系统(1)是 R-C 的充要条件为

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Im} E_a^i B_a + \mathrm{Im}(I - E_a^D E_a) = \mathrm{R}^n; \tag{17}$$

2) 系统(1)是 R-O 的充要条件为

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CE_a^i \cap \ker(I - E_a^D E_a) = 0. \tag{18}$$

定理 4　1) 系统(1)是 I-C 的充要条件为

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Im} E_a^i B_a + \ker E_a + \mathrm{Im}(E_a^D E_a) = \mathrm{R}^n; \tag{19}$$

2) 系统(1)是 I-O 的充要条件为

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CE_a^i \cap \mathrm{Im} E_a \cap \ker(E_a^D E_a) = 0. \tag{20}$$

其中 E_a^D 表示矩阵 E_a 的 Drazin 逆.

参 考 文 献

[1] Verghese, G. C.. Infinite-Frequency Behavior in Generalized Dynamical Systems. Ph. D. dissertation, Dept. Electrical Engineering, Stanford Univ., Dec. 1978

[2] Cobb, D.. Feedback and Pole Placement in Deseriptor Variable Systems. Int. J. Control, 1981, 33(6):1135—1146

[3] Yang, G. T. and Tarn, T. J.. Strong Controllability and Strong Observability of Gereralized Dynamical Systems. Proc. 20th Annual Allerton Conf. on Communication Control and Computing, 1982

[4] 许可康. 奇异系统的强能控性与强能观性. 控制理论与应用,1985,2(2):82—90

[5] 许可康. 奇异系统的能控性. 系统科学与数学,1987,7(1):23—26

[6] Cobb, D.. Controllability, Observability, and Duality in Singular Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29(12):1076—1082

[7] Zhou Zheng, et al.. Singular Systems: A New Approach in the Time Domain. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(1):42—50

[8] Yip, E. L. and Sincovec, R. F.. Solvability, Controllability, and Observability of Continuors Descriptor Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(3):702—707

[9] Campbell, S. L.. Singular Systems of Differential Equations. London:Pitman, 1980

[10] Wonham, W. M.. Linear Multivariable Control. Springer-Verlag, 1974

[11] Armentano, V. A.. The Pencial ($sE-A$) and Controllability-Observability for Generalized Linear Systems: A Geometric Approach. SIAM J. Control and Opt., 1986, 24(4):616—638

Strong Controllability and Strong Observability of Generalized Control Systems

WANG Dianhui and XIE Xukai

(Department of Machematics, Northeast University of Technology • Shenyang, 110006, PRC)

Abstract: In this paper, strong controllability and strong observability of the following regular generalized control systems are considered

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t).$$

With no decomposition of the system, some new criterions (frequency domain and time domain) on S-C and S-O are established.

Key words: generalized control systems; strong controllability; stong observability

本文作者简介

王殿辉　1962年生. 1984年辽宁大学数学系毕业. 1984年至1987年航空部第626研究所助理工程师. 1987年至1989年鞍山钢铁学院讲师. 1991年底毕业于东北工学院应用数学系,获理学硕士学位,同年考入东北工学院自动控制系攻读博士学位. 主要研究兴趣为广义系统和数值分析. 目前研究领域为自适应控制,Fuzzy控制系统.

谢绪恺　1925年生. 1947年南京中央大学电机系毕业. 1950年至1952年大连工学院电讯系讲师. 1952年至今在东北工学院工作,现为该院数学系教授. 主要研究兴趣为线性系统稳定性,广义系统,分散大系统等. 目前研究领域为广义分散控制系统.