

非线性系统的 I/O 扩展线性化

孙 浩 席裕庚 张钟俊

(上海交通大学自动控制系统, 200030)

摘要: 本文以 SISO 非线性系统的输入-输出关系为对象研究扩展线性化方法. 不仅讨论了 I/O 扩展线性化状态反馈的存在性, 而且给出了该状态反馈的详细设计步骤. 最后, 对一个实例进行了仿真计算.

关键词: 非线性系统; I/O 扩展线性化

1 概 述

对于线性系统已经有许多有效的控制方法, 而对于非线性系统则缺乏比较简便有效的控制方法. 因此, 人们很自然地想到首先将非线性系统在某种意义上线性化, 然后按照适当的线性控制规律对其进行控制. 迄今为止, 主要有两大类的线性化方法. 一类是在全局范围内的精确线性化方法^[1,2], 其效果非常好, 但应用范围受到限制, 主要用于仿射类的非线性系统; 另一类则是近似线性化. 传统的近似线性化是以一个固定的平衡点为基础展开的, 仅在工作点的邻域内有效, 无法对系统进行大范围的控制. 近年来, 出现了一种扩展线性化的方法^[3~7], 它将系统的动态过程近似地分解为无记忆的平衡过程和有记忆的增量过程, 通过引入一个静态的非线性状态反馈使其增量过程具有某种线性品质. 这种方法将一个固定的平衡点扩展为一条跟随系统变化的平衡轨线, 因此在大范围内有效, 比传统的近似线性化方法更进了一步. 本文致力于研究输入-输出意义上的扩展线性化方法, 通过引入一个状态反馈使闭环系统的增量输入-输出关系为线性定常且系数可任意配置. 闭环系统的这种 I/O 扩展线性特性有助于进一步对其施加某些优化控制算法, 如预测控制等. 本文讨论了 I/O 扩展线性化状态反馈的存在性, 并给出了详细的设计步骤.

2 定 义

考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0, 0) = 0$; $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(0) = 0$; f, h 连续可微, $1 \leq n < \infty$. 假设系统 (1) 具有平衡轨线

$$\{u_e(\alpha), x_e(\alpha), y_e(\alpha), \alpha \in \Gamma\} \quad (2)$$

满足

$$\begin{cases} f[x_e(\alpha), u_e(\alpha)] = 0, \\ y_e(\alpha) = h[x_e(\alpha)], \end{cases} \quad \alpha \in \Gamma. \quad (3)$$

其中参数集 Γ 是包含原点的 $\mathbb{R}$ 开子集, $u_e(\alpha): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, u_e(0)=0$; $x_e(\alpha): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n, x_e(0)=0$; $y_e(\alpha): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, y_e(0)=0$, 连续可微.

在 $[u_e(\alpha), x_e(\alpha), y_e(\alpha)]$ 的邻域内系统(1)可近似描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_\delta(t) = F(\alpha)x_\delta(t) + G(\alpha)u_\delta(t), \\ y_\delta(t) = H(\alpha)x_\delta(t), \end{cases} \quad (4)$$

及

$$\begin{cases} x_\delta(t) + x_e(\alpha) \approx x(t), \\ y_\delta(t) + y_e(\alpha) \approx y(t), \\ u_\delta(t) + u_e(\alpha) \approx u(t). \end{cases} \quad (5)$$

其中 $F(\alpha) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e(\alpha) \\ u=u_e(\alpha)}}, \quad G(\alpha) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e(\alpha) \\ u=u_e(\alpha)}}, \quad H(\alpha) = \left. \frac{dh(x)}{dx} \right|_{x=x_e(\alpha)}.$

必须指出, 平衡轨线(2)反映的是随着系统运行其基准平衡点的变化情况, 其规律取决于参数 α 的选择. 若系统从时刻 t_1 到 t_2 由平衡点 $\{u_1, x_1, y_1\}$ 运行到另一个平衡点 $\{u_2, x_2, y_2\}$, 则在此期间系统的状态、平衡轨线参数及线性化增量的相互关系如图 1 所示. 为与传统的固定点近似线性化相比较, 加入固定平衡点 x_f 的时间轨线. 图 1 仅以状态变量 x 为例, 输入 u 及输出 y 与此相类似.

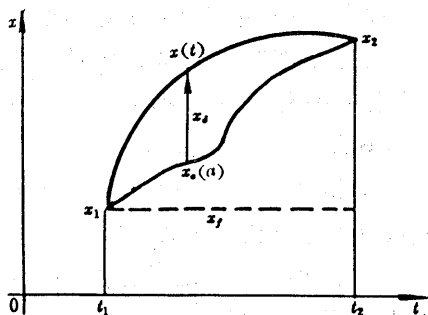


图 1 系统状态、平衡参数及增量之关系

假设系统(1)在其平衡轨线(2)上其线性部分(4)具有有限定常的输出可控性指数 μ , 即

$$\begin{cases} H(\alpha)F^l(\alpha)G(\alpha) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, \mu - 2, \\ H(\alpha)F^{\mu-1}(\alpha)G(\alpha) \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

扩展线性化的主要思想在于将非线性系统(1)的动态过程分解为一个无记忆的平衡过程(2)和一个有记忆的增量过程(4), 通过引入一个静态的非线性状态反馈使闭环系统的动态增量过程具有某种线性系统的特征, 如定常的特征值等. 当然, 对不同的线性品质需作不同的研究. 本文将致力于研究输入-输出意义上的扩展线性化问题, 希望能够找到一个静态的非线性状态反馈使闭环系统的增量输入-输出模型线性定常, 且其系数可任意配置并与参数 α 无关, 以便对其进一步施加某些优化控制算法, 如预测控制等.

定义 1 考虑非线性系统(1), 在任一平衡点上有近似线性增量模型(4). 若增量输入-输出关系线性且与 α 无关, 则称非线性系统(1)为 I/O 扩展线性的.

对于非线性系统(1), 引入非线性状态反馈

$$u = \Psi(x, v). \quad (7)$$

v 是附加的外部输入, 则闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \Psi(x, v)), \\ y = h(x). \end{cases} \quad (8)$$

在平衡轨线 $\{x_e(\alpha), y_e(\alpha), u_e(\alpha)\}$ 的邻域内, 闭环系统(8)的近似线性增量模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_\delta = [F(\alpha) + G(\alpha)K(\alpha)]x_\delta + G(\alpha)M(\alpha)v_\delta, \\ y_\delta = H(\alpha)x_\delta. \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} K(\alpha) = \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_s(\alpha) \\ v=v_s(\alpha)}}, \\ M(\alpha) = \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial v} \Big|_{\substack{x=x_s(\alpha) \\ v=v_s(\alpha)}}, \\ u_s(t) = K(\alpha)x_s(t) + M(\alpha)v_s(t). \end{cases} \quad (10)$$

定义 2 考虑非线性系统(1)及非线性状态反馈(7),有闭环系统(8)及其近似线性增量模型(9).若(9)的输入-输出关系线性且与参数 α 无关,则称(7)为 I/O 扩展线性化状态反馈,它将非线性系统(1)I/O 扩展线性化.

3 I/O 扩展线性化状态反馈

由(9)式可知, y_s 与 v_s 的关系可通过选择不同的 $K(\alpha)$ 和 $M(\alpha)$ 而改变,因此,寻找 I/O 扩展线性化状态反馈的任务可分解为求解下面两个问题.

问题 1 能否找到 $K(\alpha)$ 和 $M(\alpha)$ 使得 y_s 与 v_s 的关系是线性且与 α 无关的?

问题 2 对于已确定的 $K(\alpha)$ 和 $M(\alpha)$, 是否存在非线性状态反馈 $u = \Psi(x, v)$ 使(10)式成立? 怎样构造函数 $\Psi(x, v)$?

对于问题 1,在线性增量模型(4)中认为 α 是独立的参数.利用假设条件(6),对(4)的输出 y_s 逐次求导可得

$$\begin{cases} \frac{d^l y_s}{dt^l} = H(\alpha)F^l(\alpha)x_s, & l = 0, 1, \dots, \mu - 1, \\ \frac{d^\mu y_s}{dt^\mu} = H(\alpha)F^\mu(\alpha)x_s + H(\alpha)F^{\mu-1}(\alpha)G(\alpha)u_s. \end{cases} \quad (11)$$

于是,可设计状态反馈增量如下

$$u_s(t) = \frac{\beta_0 v_s - \sum_{l=0}^{\mu-1} H(\alpha)F^l(\alpha)x_s}{\beta_\mu H(\alpha)F^{\mu-1}(\alpha)G(\alpha)}, \quad \beta_\mu \neq 0, \quad (12)$$

使闭环线性增量模型的输入-输出描述为

$$\sum_{l=0}^{\mu} \beta_l \frac{d^l y_s}{dt^l} = \beta_0 v_s. \quad (13)$$

其中系数 $\beta_l, l=0, 1, \dots, \mu, \beta_\mu \neq 0$, 是可任意选定的常数.

式(13)说明, y_s 与 v_s 的关系是线性且与参数 α 无关.比较式(10)和(12)可求得问题 1 的解为

$$\begin{cases} K(\alpha) = -\frac{\sum_{l=0}^{\mu} \beta_l H(\alpha)F^l(\alpha)}{\beta_\mu H(\alpha)F^{\mu-1}(\alpha)G(\alpha)}, \\ M(\alpha) = \frac{\beta_0}{\beta_\mu H(\alpha)F^{\mu-1}(\alpha)G(\alpha)}. \end{cases} \quad (14)$$

对于问题 2,通过证明下面的定理来解决.

定理 1 考虑非线性系统(1)及其线性增量模型(4),设计状态反馈增量 $u_s = K(\alpha)x_s$

+ $M(a)v_s, K(a), M(a)$ 由式(14)决定, 且令 $v_s(a) = y_s(a)$. 对于 $a \in \Gamma$, 假设 $\frac{du_s(a)}{da}$ 与 $\frac{dx_s(a)}{da}$ 不同时为零, 则存在非线性状态反馈 $u = \Psi(x, v)$, 满足

$$K(a) = \left. \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_s(a) \\ v=v_s(a)}}, \quad M(a) = \left. \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial v} \right|_{\substack{x=x_s(a) \\ v=v_s(a)}}.$$

证 综合(3), (6), (14)及条件 $v_s(a) = y_s(a)$ 可得

$$M(a) \frac{dv_s(a)}{da} + K(a) \frac{dx_s(a)}{da} = \frac{du_s(a)}{da}. \quad (15)$$

对于 $a \in \Gamma$, 因为 $\frac{du_s(a)}{da}$ 与 $\frac{dx_s(a)}{da}$ 不同时为零, 所以由式(15)知, $\frac{dv_s(a)}{da}$ 与 $\frac{dx_s(a)}{da}$ 也不同时为零. 于是, 存在可逆函数 $S(a)$, $S(a)$ 是 $\frac{dv_s(a)}{da}$ 与 $\frac{dx_s(a)}{da}$ 中不为零的分量所对应的 $v_s(a)$ 及 $x_s(a)$ 的分量的线性组合, 即

$$S(a) = S_1 v_s(a) + S_2 x_s(a). \quad (16)$$

其中 S_1 是常数, S_2 是定常行向量.

在式(16)中的 S_1, S_2 确定之后, 构造函数 $S(z)$:

$$S(z) = S_1 v(z) + S_2 x(z). \quad (17)$$

于是, 存在非线性状态反馈

$$u = \Psi(x, v) = u_s(z) + K(z)[x - x_s(z)] + M(z)[v - y_s(z)]. \quad (18)$$

比较(16), (17)知, 在系统的平衡轨线上有

$$z \Big|_{\substack{x=x_s(a) \\ v=v_s(a)}} = a. \quad (19)$$

综合式(15)和(18)并利用关系式(19)可计算得

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_s(a) \\ v=v_s(a)}} = K(a), \quad \left. \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial v} \right|_{\substack{x=x_s(a) \\ v=v_s(a)}} = M(a).$$

定理 1 得证.

定理 1 不仅指出了 I/O 扩展线性化状态反馈 $\Psi(x, v)$ 的存在性, 而且给出了 $\Psi(x, v)$ 的构成方法.

至此, 得下面结论:

对于非线性系统(1)及其平衡轨线(2), 若满足假设条件(6)以及 $\frac{du_s(a)}{da}$ 与 $\frac{dx_s(a)}{da}$ 不同时为零, 则存在静态的非线性状态反馈 $u = \Psi(x, v)$ 使闭环系统是 I/O 扩展线性的, 函数 $\Psi(x, v)$ 按式(18)构成.

4 举 例

考虑一个球杆装置的运动问题, 如图 2 所示. 其运动方程为

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + M \right) \ddot{r} + MG \sin \theta - Mr \dot{\theta}^2 = 0,$$

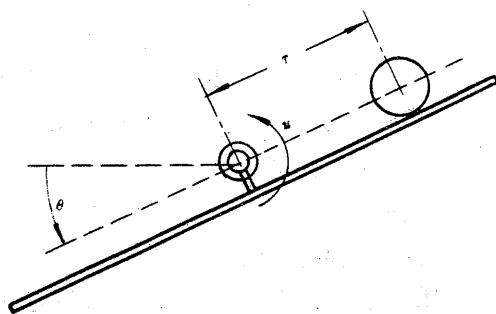


图 2 球杆装置

$$u = (J + Mr^2)\ddot{\theta} + Mr\dot{\theta}\dot{r} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} + MGr\cos\theta.$$

其中 J 是杆的转动惯量, M, J_b 和 R 分别是球的质量、转动惯量和半径, G 是重力加速度, θ 是杆的水平偏角, r 是球沿杆偏离中心点的位移, u 是作用在杆上的转矩.

令 $x_1=r, x_2=\dot{r}, x_3=\theta, x_4=\dot{\theta}, y=x_1$, 并取各系数 $J=0.02\text{kgm}^2, M=0.05\text{kg}, J_b=2\times 10^{-4}\text{kgm}^2, R=0.01\text{m}, G=9.81\text{m/s}^2$, 则系统的状态空间描述为

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = 3.571 \times 10^{-2}x_1x_2^2 - 0.3504\sin x_3,$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{2+5x_1^2}(-3.571x_1^2x_3x_4^2 + 35.036x_1x_3\sin x_3 - 10x_1x_2x_4 - 98.1x_1\cos x_3 + 100u).$$

令 $\alpha=x_1$, 则平衡轨线为

$$x_3(\alpha) = [\alpha, 0, 0, 0]^T, \quad y_e(\alpha) = \alpha, \quad u_e(\alpha) = 0.981\alpha$$

于是, 线性增量模型的系数矩阵为

$$F(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3504 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{98.1}{2+5\alpha^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{100}{2+5\alpha^2} \end{bmatrix},$$

$$H(\alpha) = [1, 0, 0, 0].$$

线性增量模型的输出可控性指数为 $\mu=4$.

令系数: $\beta_0=24, \beta_1=50, \beta_2=35, \beta_3=10, \beta_4=1$, 则按式(14)可求得

$$K(\alpha) = [0.981 + \frac{2+5\alpha^2}{1.46}, \frac{2+5\alpha^2}{0.7008}, -0.35(2+5\alpha^2), -0.1(2+5\alpha^2)],$$

$$M(\alpha) = -\frac{2+5\alpha^2}{1.46},$$

$$\therefore \frac{dv_e(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dy_e(\alpha)}{d\alpha} = 1, \quad \frac{dx_e(\alpha)}{d\alpha} = [1, 0, 0, 0]^T$$

$\therefore$ 令 $S_1=0, S_2=[1, 0, 0, 0]$, 则 $z=x_1$.

按式(18)求得 I/O 扩展线性化状态反馈为

$$u = 0.981x_1 + (2+5x_1)(0.685x_1 + 1.427x_2 - 0.35x_3 - 0.1x_4 - 0.685v).$$

对于几种不同的初始状态和输入量, 闭环系统的动态响应如图 3 所示.

5 结束语

I/O 扩展线性化方法从本质上说并没有将一个非线性系统转化为一个线性定常系统, 然而在系统运行过程的局部控制区域中却提供了一个线性定常的增量 I/O 模型及一个无记忆的平衡过程模型. 利用增量 I/O 模型的线性定常特点和平衡过程模型的无记忆特点, 可以对这样一个 I/O 扩展线性化的闭环系统进一步

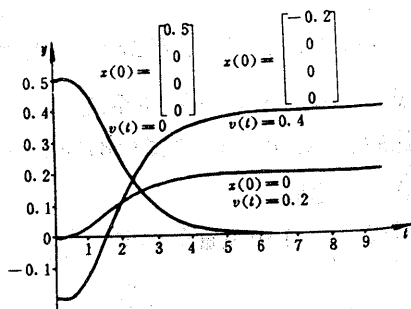


图 3 系统输出动态响应

实施一些线性的优化控制算法,如预测控制算法等,从而达到较好地对系统进行控制的目的。

参 考 文 献

- [1] Cheng, D. et al. . Global Feedback Linearization of Nonlinear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1985, AC-30, 808—811
- [2] Fernandez, B. et al. . Control of Multivariable Nonlinear Systems by the Sliding Mode Method. Int. J. Control, 1987, 46(3):1019—1040
- [3] Banmann, W. T. et al. . Feedback Control of Multi-Input Nonlinear System by Extended Linearization. IEEE Trans. Automat. Contr. 1988, AC-33(2):193—197
- [4] Banmann, W. T. et al. . Feedback Control of Nonlinear System by Extended Linearization. IEEE Trans. Automat. Contr. 1986, AC-31(1):40—46
- [5] Rugh, W. J. . An Extended Linearization Approach to Nonlinear System Inversion. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1986, AC-31(8):725—733
- [6] Wang, J. et al. . Parameterized Linear Systems and Linearization Families for Nonlinear Systems. IEEE Trans. 1987, CAS-34(6):650—657
- [7] Wang, J. et al. . Feedback Linearization Families for Nonlinear Systems, IEEE Trans. Automat. Contr. , 1987, AC-32(10):935—940

I/O Extended Linearization for Nonlinear Systems

SUN Hao, XI Yugeng and ZHANG Zhongjun

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: This paper deals with the extended linearization of SISO nonlinear systems on the means of input-output. A theorem is proved that there exists a state feedback such that the closed-loop system has a linear time-invariant incremental I/O model. The procedure to get the I/O extended linearizing state feedback is also presented in this paper. An example is given to illustrate the effectiveness of this method.

Key words: I/O extended linearization; nonlinear system

本文作者简介

孙 浩 1962 年生, 1990 年在上海交通大学毕业, 获工学博士学位. 现为上海交通大学自动控制系讲师. 主要从事生产过程自动化方面的研究. 目前感兴趣的是复杂工业过程的优化控制.

席裕庚 1946 年生, 1968 年毕业于哈尔滨军事工程学院, 1984 年在德国获工学博士学位. 现为上海交通大学自动控制系教授, 控制理论及应用博士生导师. 著有动态大系统方法导论, 预控制等书. 主要从事复杂系统控制理论的研究. 目前的主要研究领域是复杂工业过程的优化控制及智能机器人控制.

张钟俊 见本刊 1993 年第 2 期第 204 页.