第 10 卷第 3 期
1993 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 3
Jun. , 1993

多变量 H_∞ 控制问题的显式解*
(第二部分,退化情形)

王正志
(国防科技大学自动控制系·长沙,410073)

5 退化情形的显式解

问题(2)有解的充要条件是 Pick 矩阵 $P\geqslant 0$,其中 $\det P=0$时发生了退化,这时 P 的逆不存在,公式(13)无法使用,需要另作处理,在 H_∞最优控制问题求解时,必定出现退化情形,所以退化情形的显式解值得专门研究. P 为 Hermite 矩阵,可以做 Cholesky 分解

$$P = U_0^* \operatorname{diag}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r_0},0,\cdots,0\}U_0. \tag{37}$$

这里假设有 r_0 度退化,从而出现 r_0 个 0. 而

$$\gamma_i < 0,\quad i = 1,\cdots,n-r_0,$$

$$U_0 = \begin{Bmatrix} u_上 \\ u_下 \end{Bmatrix}. \tag{38}$$

其中 $u_上$ 为酉矩阵 U_0 的第一行到第 $n-r_0$ 行,$u_下$ 为酉矩阵 U_0 的第 $n-r_0+1$ 行到第 n 行.

选择二个酉矩阵 V_1 和 V_2,使得

$$V_1^{上} X u_下^* = 0, \tag{39}$$

$$V_2^{上} Y u_下^* = 0. \tag{40}$$

这里 V_1 和 V_2 分别为 $r\times r$, $m\times m$ 维的酉矩阵. $V_1^{上}$ 为 V_1 的第一行到第 $r-r_0$ 行,$V_2^{上}$ 为 V_2 的第一行到第 $m-r_0$ 行. 而 X 和 Y 由(8)和(9)分别决定. 再记

$$\gamma^{-1} = \operatorname{diag}\{\gamma_1^{-1},\cdots,\gamma_{n-r_0}^{-1}\}, \tag{41}$$

定理 2 在退化情形(37)时,

$$\Phi = (W + HU) \cap BH_\infty^{m\times r},\quad H \in H_\infty^{m\times r}$$

的全部解为

$$\Phi = L\{\Theta\} \triangleq \begin{bmatrix} \Theta C + D \\ F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Theta A + B \\ E \end{bmatrix},\quad \Theta \in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}, \tag{42}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_+ \\ L_- \\ L_0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \\ E & F \end{bmatrix} & \begin{matrix} r-r_0 \\ m-r_0 \\ r_0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & \quad m \end{matrix} & \end{array}, \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix} L_+ \\ L_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{上} & 0 \\ 0 & V_2^{上} \end{bmatrix} \left[I_{r+m} - \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix} u_上^* \gamma^{-1} u_上 \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right], \tag{44}$$

---

* 本文的第一部分已发表在本刊1993年第1期.

本文于1991年5月21日收到. 1992年4月6日收到修改稿.

$$L_0 = u_{\text{下}}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{45}$$

以上解式还可以更明显写为

$$A = V_1^{\text{上}}\left\{ I_r - Xu_{\text{上}}^* \gamma^{-1} u_{\text{上}}\left(\frac{x_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v \right\}, \tag{46}$$

$$B = V_2^{\text{上}} Y u_{\text{上}}^* \gamma^{-1} u_{\text{上}}\left(\frac{x_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v, \tag{47}$$

$$C = -V_1^{\text{上}} X u_{\text{上}}^* \gamma^{-1} u_{\text{上}}\left(\frac{y_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v, \tag{48}$$

$$D = V_2^{\text{上}}\left\{ I_m + Y u_{\text{上}}^* \gamma^{-1} u_{\text{上}}\left(\frac{y_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v \right\}, \tag{49}$$

$$E = u_{\text{下}}\left(\frac{x_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v, \tag{50}$$

$$F = u_{\text{下}}\left(\frac{y_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v. \tag{51}$$

其中

$$\left(\frac{x_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^*}{s+\bar{s}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{x_n^*}{s+\bar{s}_N} \end{bmatrix}, \quad \left(\frac{y_i^*}{s+\bar{s}_i}\right)_v = \begin{bmatrix} \dfrac{y_1^*}{s+\bar{s}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n^*}{s+\bar{s}_n} \end{bmatrix}. \tag{52}$$

6 退化情形显式解的证明

Krein 空间是不定度规空间. 我们在第一部分定义了正子空间和负子空间,如果它们所有元素 f 分别有 $[f,f]\geqslant 0$ 和 $[f,f]\leqslant 0$. 我们还可以进一步定义正性子空间、负性子空间和零性子空间,如果它们所有元素 f 分别有 $[f,f]>0$, $[f,f]<0$, $[f,f]=0$. 假设 Krein 空间的子空间 M 内有一个零性子空间 N, N 的正交补是 N',于是 $M\cap N'$ 可以有如下正交分解

$$M\cap N' = Q\oplus R\oplus N.$$

其中 Q,R,N 分别是 M 中的正性、负性、零性子空间.

引理 8 若 L 由(43),(44),(45)给定,我们有

$$M\cap N' = \mathrm{H}_2^{m+r-r_0}L. \tag{53}$$

证 我们从算子理论的一个基本结果出发,在[6]中 Ball 和 Helton 证明了如下结果

$$M\cap N' = \bigcup_{k\geqslant 0}^{\infty}\sigma^k\mathscr{L}, \tag{54}$$

$$\mathscr{L} \triangleq M\cap(\sigma M)'. \tag{55}$$

其中 σ 为位移算子. 在 s 域中,我们可取

$$\sigma = \frac{s-a}{s+a}, \quad a>0. \tag{56}$$

我们将用上述结果推导(53)式,这里首先注意

$$(\sigma M)' = (\sigma K^{r,m})' \cup \sigma M', \tag{57}$$

$$(\sigma K^{r,m})' = \frac{\sqrt{2a}}{s+a} C^{m+r}. \tag{58}$$

其中 C^{m+r} 为 $m+r$ 维的数值矢量空间. 由引理 4 知 M' 是由 $\{b_1,\cdots,b_n\}$ 张成，于是可把(57)写成显式

$$(\sigma M)' = \frac{\sqrt{2a}}{s+a} C + \frac{s-a}{s+a}\sqrt{2a} D\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}. \tag{59}$$

其中　$C \in \mathbf{C}^{m+r},\quad D \in \mathbf{C}^n.$

下一步欲求 C 和 D，使得(59)表达的 $(\sigma M)'$ 落入 M 中，从而得到(55)式中 $\mathscr{L}$ 的显式表示. 由于 M 与 b_i 正交，所以(59)应该与 b_i 正交，

$$\left[\frac{\sqrt{2a}}{s+a} C + \frac{s-a}{s+a}\sqrt{2a} D\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}, b_i\right] = 0. \tag{60}$$

这就是

$$C\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix} + DP\mathrm{diag}\{s_1 - a,\cdots,s_n - a\} = 0. \tag{61}$$

在退化情形，P 是奇异的，把它的 Cholesky 分解代入(61)，得到

$$C\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\mathrm{diag}\{(s_1-a)^{-1},\cdots,(s_n-a)^{-1}\}U_0^* + DU_0^*\mathrm{diag}\{\gamma,0\} = 0. \tag{62}$$

为了简洁，以后用 $\{s_i - a\}$ 表示 $\mathrm{diag}\{s_i - a,\cdots,s_n - a\}$. 由(62)可得如下二式

$$C\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\{(s_i-a)^{-1}\}u_{下}^* = 0, \tag{63}$$

$$D = -C\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\{(s_i-a)^{-1}\}u_{上}^*\gamma^{-1}u_{上} + E_1 u_{下}. \tag{64}$$

其中 $E_1 \in \mathbf{C}^{r_0}$. 把(64)的 D 代入(59)得

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_{01}. \tag{65}$$

其中 $\mathscr{L}_{01}$ 属于零性空间 N，

$$\mathscr{L}_{01} = \frac{s-a}{s+a}\sqrt{2a}E_1 u_{下}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}, \tag{66}$$

$$\mathscr{L}_1 = \frac{\sqrt{2a}}{s+a} C\left\{I_{m+r} - (s-a)\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\left\{\frac{1}{s_i - a}\right\}u_{上}^*\gamma^{-1}u_{上}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\right\}. \tag{67}$$

经过较长的运算，可以把(67)改写为(见附录 1)

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_{02}. \tag{68}$$

其中 $\mathscr{L}_{02}$ 也属于零性空间 N，

$$\mathscr{L}_{02} = \frac{\sqrt{2a}}{s+a} E_2 u_{下}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}, \tag{69}$$

$$E_2 = C\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\{(s_i-a)^{-1}\}u_{上}^*\gamma^{-1}u_{上}\{\bar{s}_i + a\}u_{下}^*, \tag{70}$$

$$\mathscr{L}_2 = \frac{\sqrt{2a}}{s+a} R\left\{I_{m+r} - \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}u_{上}^*\gamma^{-1}u_{上}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\right\}, \tag{71}$$

$$R = C\left\{I_{m+r} - \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\{(s_i - a)^{-1}\}u_{上}^{*}\gamma^{-1}u_{上}\{X^*, Y^*\}\right\}. \tag{72}$$

在附录 2 中，我们将证明如下关系成立

$$R\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}u_{下}^{*} = C\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\{(s_i - a)^{-1}\}u_{下}^{*}u_{下}\{s_i - a\}u_{下}^{*}. \tag{73}$$

注意到(73)式中 $u_{下}\{s_i-a\}_{下}^{*}$为非奇，可把(63)等价为

$$R\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}u_{下}^{*} = 0. \tag{74}$$

注意到 $C\in C^{m+r}$，而且 C 必须满足(63)，所以 C 只有 $m+r-r_0$ 个自由度. 再注意在(70)中，若给予 E_2 以 r_0 个主动自由度，则 C 就又失去另外 r_0 个自由度. 这样 C 就只有 $m+r-2r_0$ 个主动自由度了. 于是由(72)知 R 也只有 $m+r-2r_0$ 个主动自由度. 故令

$$R = R_1\begin{bmatrix} V_1^{上} & 0 \\ 0 & V_2^{上} \end{bmatrix}, \quad R_1 \in \mathrm{C}^{m+r-2r_0}. \tag{75}$$

其中 $V_1^{上}$ 是 V_1 的前 $r-r_0$ 行，$V_2^{上}$ 是 V_2 的前 $m-r_0$ 行. 由于 $V_1^{上}$ 和 $V_2^{上}$ 分别满足(39)和(40)，所以(75)式表达的 R 必定满足约束(74)，从而(63)得到满足.

把(75)式代入(71)得到

$$\mathscr{L}_2 = \frac{\sqrt{2a}}{s+a}R_1\begin{bmatrix} L_+ \\ L_- \end{bmatrix}. \tag{76}$$

其中 L_+和 L_-如(44)所示. 再注意由(45)定义的 L_0，可把(66)和(69)改写为

$$\mathscr{L}_{01} = \sqrt{2a}\,\frac{s-a}{s+a}E_1L_0, \tag{77}$$

$$\mathscr{L}_{02} = \frac{\sqrt{2a}}{s+a}E_2L_0, \tag{78}$$

它们都属于零性空间 N. 总之有 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_2+\mathscr{L}_{01}+\mathscr{L}_{02}$. 回到基本关系(54)，我们证得

$$M\cap N' = \mathrm{H}_2^{m+r-r_0}L,$$

其中 L 由(43)～(45)所示. 引理 8 得证.

引理 9

$$LJL^* = \begin{bmatrix} I_{r-r_0} & & \\ & -I_{m-r_0} & \\ & & O_{r_0} \end{bmatrix}. \tag{79}$$

而且 $H_2^{r-r_0}L_+$, $H_2^{m-r_0}L_-$, $H_2^{r_0}L_0$ 分别是 $M\cap N'$ 中的正性、负性、零性子空间.

证 同引理 3，只是 L 由(43)～(45)所示.

引理 10 φ 是 $M\cap N'$ 中位移不变最大负子空间，当且仅当它具有如下形式

$$\varphi = \mathrm{H}_2^{m}\begin{bmatrix} \Theta & I_{m-r_0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_0} \end{bmatrix}L, \quad \Theta \in \mathrm{BH}_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}. \tag{80}$$

证 由引理 8 的(53)式，我们有

$$M\cap N' = \mathrm{H}_2^{m+r-2r_0}\begin{bmatrix} L_+ \\ L_- \end{bmatrix} + \mathrm{H}_2^{r_0}L_0.$$

由引理 7 知，$H_2^{m+r-2r_0}\begin{bmatrix}L_+\\L_-\end{bmatrix}$ 中位移不变最大负子空间具有形式

$$H_2^{m-r_0}\{\Theta,I_{m-r_0}\}\begin{bmatrix}L_+\\L_-\end{bmatrix}.$$

再注意 $H_2^{r_0}L_0$ 是零性子空间，且正交于正性和负性子空间，于是可得引理 10.

定理 2 的证明　首先证明，对于任何 $\Theta\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$，$\Phi=L\{\Theta\}$ 必在球 $BH_\infty^{m\times r}$ 内并满足 $\Phi=W+HU$. 为此，对于这个 Θ，考虑形如(80)的子空间 φ. 由引理 10 可知，φ 是 $M\cap N'$ 中位移不变最大负子空间. 这样它必定包含 $M\cap N'$ 中的零性子空间 N

$$N=(M\cap N')\cap(M\cap N')'$$

由此我们可证 φ 也是 M 的最大负子空间. 用反证法. 假设不然，就存在 M 中的一个最大负子空间 ψ，使得 $\varphi\subset\psi\subset M$. 我们已证得 $N\subset\varphi$，所以 $N\subset\psi$. 又因为 N 是零性子空间，而 ψ 是负子空间，所以它们必然互相正交，$[N,\psi]=0$. 所以 $\psi\subset N'$. 于是有

$$\psi\subset M\cap N'.$$

这样 ψ 是 $M\cap N'$ 中的最大负子空间. 前面已假定 φ 是 $M\cap N'$ 中的最大负子空间，所以 $\varphi=\psi$，这证明了 φ 也必然是 M 中的最大负子空间. 由于补空间 M' 中不存在负性子空间(注意 $P\geqslant0$)，所以 φ 还应该是 $K^{r,m}$ 中的最大负子空间，故由引理 6 可知，存在 $\Phi\in BH_\infty^{m\times r}$，使得

$$\varphi=H_2^m\{\Phi,I_m\}. \tag{81}$$

比较(80)和(81)可得

$$\Phi=L\{\Theta\}=\begin{pmatrix}\Theta C+D\\F\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Theta A+B\\E\end{pmatrix}, \tag{82}$$

只要 $\Theta\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$，就有 $\Phi\in BH_\infty^{m\times r}$.

又由于 φ 在 M 中，而 M 具有形状(19)，由类似于定理 1 的论证，可知存在 $H\in H_\infty^{m\times r}$，使得 $\Phi=W+HU$. 这样我们证明了，对于任何 $\Theta\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$，可找到 $H\in H_\infty^{m\times r}$，使得 $W+HU=L\{\Theta\}$，且在 $BH_\infty^{m\times r}$ 中.

反之，若存在 $H\in H_\infty^{m\times r}$ 使得 $W+HU\in BH_\infty^{m\times r}$，于是

$$\varphi_1=H_2^m\{W+HU,I_m\} \tag{83}$$

是 $K^{r,m}$ 中的一个最大负子空间，由(83)知 φ_1 在 M 中，故它也是 M 中的最大负子空间. 因为 N 是 M 中的零性子空间，φ_1 是 M 中的最大负子空间，所以有 $N\subset\varphi_1$. 又注意 N 是零性的，φ_1 是负子空间，它们必正交，$[N,\varphi_1]=0$. 所以有 $\varphi_1\subset N'$. 总之有 $\varphi_1\subset M\cap N'$. 于是 φ_1 是 $M\cap N'$ 中的位移不变最大负子空间. 由引理 10 知，存在 $\Theta\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$ 使得

$$\varphi_1=H_2^m\begin{bmatrix}\Theta & I_{m-r_0} & 0\\0 & 0 & I_{r_0}\end{bmatrix}L. \tag{84}$$

由(83)和(84)可知，存在 $\Theta\in BH_\infty^{(m-r_0)\times(r-r_0)}$ 使得

$$W+HU=L\{\Theta\}.$$

定理 2 完全得证.

7 退化情形显式解应用举例

$$\Phi=\begin{bmatrix}\dfrac{1.32149}{s+1} & \dfrac{1.32149}{s+1}\\ \dfrac{1.32149}{s+1} & -\dfrac{1.32149}{s+1}\end{bmatrix}+H\begin{bmatrix}\dfrac{s-1}{s+1} & 0\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{s-2}{s+2}\end{bmatrix},$$

$H\in H_\infty^{2\times 2}$,求使得 Φ 落入 $BH_\infty^{2\times 2}$的解.

注意 $U(s)$的零点为 $s_1=1,s_2=2$.

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad y_1=\begin{pmatrix}1.32149\\0\end{pmatrix},$$

$$x_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad y_2=\begin{pmatrix}0.44050\\-0.44050\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}0.12684 & 0.13930\\0.13930 & 0.15298\end{pmatrix},$$

这是退化情形,P 是奇异的,作 Cholesky 分解:

$$P=\begin{pmatrix}0.67326 & -0.73940\\0.73940 & 0.67326\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.27982 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.67326 & 0.73940\\-0.73940 & 0.67326\end{pmatrix},$$

$$u_{上}=(0.67326,0.73940),\quad u_{下}=(-0.73940,0.67326),$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1.32149 & 0.44050\\0 & -0.44050\end{pmatrix}.$$

求解(39)和(40)得

$$V_1^{上}=(0.08910,-0.99602),$$
$$V_2^{上}=(0.39950,-0.91673).$$

由(46)～(51)得(略去公因子 $1/(s+1)(s+2)$)

$$A=(0.0891s^2+3.50842s+6.66044,-0.99602s^2+3.81259s+8.04973),$$
$$B=(1.88669(s+2),3.95873s+5.84521),$$
$$C=(5.85106s+10.13416,-1.56796(s+1)),$$
$$D=(0.39945s^2+4.60444s+6.69818,-0.91673s^2-3.66293s-2.74619),$$
$$E=(-0.73940(s+2),-0.06614s-0.80555),$$
$$F=(-0.68054s-1.65766,-0.29657(s+1)).$$

不难验证解式的正确性.由此可见,本文给出的显式解式计算简捷,便于计算机编程.

8 结　　论

本文用算子理论严格推导了 H_∞控制问题在非退化和退化二种情形下的统一显式解式.显式解式计算简捷,编程方便,比当前常用的 H_∞控制的几种算法简单.显式解式对于控制系统设计和性能研究十分有用.例如,当系统的输入输出特征发生变化,或者系统零极点发生变化,闭环控制系统的性能将如何变化,可以从显式解式中看得一目了然.本文第一部分用显式解式部分地解决了虚轴上有零点的 H_∞控制问题,这个问题是 H_∞控制中尚未解决的重要问题,本文作者曾经用退化情形的显式解简捷地解决了 H_∞超优化问题.H_∞控制显式解将有十分宽广的应用前景.

参 考 文 献

[1] Francis, B. A. and Zames, G.. On H^∞ Optimal Theory for SISO Feedback Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29:9—16

[2] Francis, B. A., Helton, J. W. and Zames, G.. H^∞ Optimal Feedback Controllers for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29:888—900

[3] Chang, B. C and Pearson, J. B.. Optimal Disturbance Reduction in Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29:880—888

[4] Wang, Z. Z. and Pearson, J. B.. Regulation and Optimal Error Reduction in Linear Multivariable Systems. Preprints. 9th IFAC World Congress. Budapest, Hungary, 1984, 9:1—4

[5] Sarason, D.. Generalized Interpolation in H_∞. Trans. AMS., 1967, 127:179—203

[6] Ball, J. A. and Helton, J. W.. A Beurling-Lax Theorem for the Lie Groap $u(m,n)$ which Contains Most Classical Interpolation Theory. J. Operator Theory, 1983, 9:107—142

[7] Francis, B. A.. A Course in H_∞ Control Theory. Springer Verlag, 1987

[8] Glover, K. and Doyle, J.. State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers That Satisfy an H^∞ Norm Bound and Relation to Risk Sensitivity. Systems and Control Letters. 1988, 11:167—172

[9] Bernstein, D. S. and Haddad, W. M.. LQG Control with an H_∞ Performance Bound: a Riccati Equation Approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(3):293—305

[10] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. and Francis, B. A.. State-Space Solutions to Standard H_2 and H^∞ Control Problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(8):831—847

[11] 夏道行,严绍宗. 线性算子谱理论. 北京:科学出版社,1987

附 录

附录 1 (68)～(72)的推导.

首先注意有关系

$$\{X^*,Y^*\}J\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \{s+\bar{s}_i\}P + P\{-s+s_j\}. \tag{*}$$

把(72)代入(71),再把(67)式的 $\mathscr{L}_1$ 减去(71)式的 $\mathscr{L}_2$,我们要证此差为(69)式的 $\mathscr{L}_{02}$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_1-\mathscr{L}_2 =& \frac{\sqrt{2a}}{s+a}C\Bigg\{\begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}(\bar{s}_i+a)\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \\
&- \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}(X^*,Y^*)\begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\Bigg\} \\
\overset{\text{利用}(*)}{=}& \frac{\sqrt{2a}}{s+a}C\Bigg\{\begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}(\bar{s}_i+a)(u_{\text{上}}^{*}u_{\text{上}}+u_{\text{下}}^{*}u_{\text{下}})\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \\
&+ \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} - \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}(s+\bar{s}_i)u_{\text{上}}^{*}u_{\text{上}}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,{}_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \\
&- \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\text{上}}^{*}u_{\text{上}}(-s+s_j)u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\Bigg\} \\
=& \frac{\sqrt{2a}}{s+a}C\Bigg\{\begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}(\bar{s}_i+a)u_{\text{下}}^{*}u_{\text{下}}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \\
&- \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\text{下}}^{*}u_{\text{下}}(-s+s_j)u_{\text{上}}^{*}\gamma^{-1}u_{\text{上}}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{利用(63)}}{=}\frac{\sqrt{2a}}{s+a}C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\pm}^{*}\gamma^{-1}u_{\pm}(\bar{s}_i+a)u_{\mp}^{*}u_{\mp}\{b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_n^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$$

$$=\mathscr{L}_{02}.$$

附录 2 (73)式的证明

$$R\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}u_{\mp}^{*}\overset{\text{由(72)}}{=}C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}u_{\mp}^{*}-C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\pm}^{*}\gamma^{-1}u_{\pm}(X^{*}X-Y^{*}Y)u_{\mp}^{*}$$

$$\overset{\text{由(*)}}{=}C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}u_{\mp}^{*}-C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\pm}^{*}\gamma^{-1}u_{\pm}((s+\bar{s}_i)P+P(-s+s_j))u_{\mp}^{*}$$

$$=C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}u_{\mp}^{*}-C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\pm}^{*}u_{\pm}(-s+s_j)u_{\mp}^{*}$$

$$=C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}u_{\mp}^{*}-C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{-s+s_i}{s_i-a}\right)u_{\mp}^{*}+C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\mp}^{*}u_{\mp}(-s+s_j)u_{\mp}^{*}$$

$$=C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{s-a}{s_i-a}\right)_{\mp}^{*}+C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\mp}^{*}u_{\mp}(-s+s_j)u_{\mp}^{*}$$

$$=C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\mp}^{*}u_{\mp}(s-a)u_{\mp}^{*}+C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\mp}^{*}u_{\mp}(-s+s_j)u_{\mp}^{*}$$

$$=C\begin{pmatrix}X\\-Y\end{pmatrix}\left(\frac{1}{s_i-a}\right)u_{\mp}^{*}u_{\mp}(s_i-a)u_{\mp}^{*}.$$

Explicit Solution Expressions of the Multivariable H_∞ Control Problems

WANG Zhengzhi

(Automatic Control Department, National University of Defence Technology · Changsha, 410073, PRC)

Abstract: This paper gives the explicit solution expressions of the multivariable H_∞ control problem in s domain. The first part gives the unified explicit solution expressions for non-degenerate case from the input and output point of view. The second part gives the unified explicit solution expressions for degenerate case which is very important, since the H_∞ optimal control is corresponding to the degenerate case. These unified explicit expressions bring convenience to the design of control systems and the research on the properties of the solutions of H_∞ control.

Key words: krein space; J-unitary matrix; shift invariant maximal negative subspace

本文作者简介

王正志 见本刊 1993 年第 1 期第 35 页.