第 10 卷第 3 期
1993 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 3
Jun., 1993

局部具有指数稳定性的干扰解耦问题

蒋丹墀　　　　郑毓蕃
(贵州大学数学系·贵阳,550025)　(华东师范大学数学系·上海,200062)

摘要：本文研究了含于输出映射的核空间中最大受控不变分布里不含非零能控性分布的非线性系统性质,提出了包含干扰的最小受控不变分布的概念并用之解决这类系统局部具有指数稳定性的干扰解耦问题,得到充分必要的条件,并对一般的非线性系统作了推广.

关键词：干扰解耦；指数稳定性；包含干扰的受控不变分布；非线性控制系统

1　Δ^* 中不含非零能控性分布的系统性质

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x\in M\subset \mathrm{R}^n$,$M$ 是光滑流形,$y\in \mathrm{R}^l$,$u\in \mathrm{R}^m$,$G(x)$是列满秩矩阵,$f(x)$及 $G(x)$的列向量都是 M 上的光滑向量场,$h(x)$是光滑满映射.

引理 1.1　Δ_1,Δ_2 是系统(1.1)的两受控不变非奇异对合分布,$\Delta_1\subset\Delta_2$,且 $\Delta_2\cap\mathscr{G}=\{0\}$,$\mathscr{G}$ 是 G 的列向量张成的分布,记

$$\mathscr{F}(\Delta_i) = \{(\alpha(x),\beta(x)\,|\,\beta(x) \text{ 可逆且}[f + G\alpha,\Delta_i] \subset \Delta_i,$$
$$[(G\beta)_j,\Delta_i] \subset \Delta_i, j = 1,2,\cdots,m\},\quad i = 1,2.$$

其中 $\alpha(x)$,$\beta(x)$分别是 $n\times 1$,$m\times m$ 矩阵,$[f+G\alpha,\Delta_i]$和$[(G\beta_j),\Delta_i]$是把 Δ_i 看作向量场集合分别取其中元素所作的李括号,则 $\mathscr{F}(\Delta_2)\subset\mathscr{F}(\Delta_1)$.

证　任意$(\bar{\alpha}(x),\bar{\beta}(x))\in\mathscr{F}(\Delta_2)$,闭环系统为

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{f}_1(\bar{x}_1) + \bar{G}_1(\bar{x}_1)v,$$
$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{f}_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \bar{G}_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)v.$$

其中 $v=\beta^{-1}(n-\alpha)$,$\Delta_2=\mathrm{sp}\{\partial/\partial\bar{x}_2\}$,第二式可为

$$\dot{\bar{x}}_{21} = \bar{f}_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \bar{G}_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)v,$$
$$\dot{\bar{x}}_{22} = \bar{f}_{22}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \bar{G}_{22}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)v.$$

且 $\Delta_1=\mathrm{sp}\{\partial/\partial\bar{x}_{22}\}$,取$(\tilde{\alpha}(\bar{x}),\tilde{\beta}(\bar{x}))$使

$$(\bar{\alpha},\bar{\beta})\circ(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = (\bar{\alpha}(x(\bar{x})) + \bar{\beta}(x(\bar{x}))\tilde{\alpha}(\bar{x}),\bar{\beta}(x(\bar{x}))\,\tilde{\beta}(\bar{x})) \in \mathscr{F}(\Delta_1)$$

应有
$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}_{22}}\begin{pmatrix} \bar{f}_1(\bar{x}_1) + \bar{G}_1(\bar{x}_1)\tilde{\alpha}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ \bar{f}_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \bar{G}_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\tilde{\alpha}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\end{pmatrix} = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial\bar{x}_{22}}\begin{pmatrix} \bar{G}_1(\bar{x}_1)\tilde{\beta}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ \bar{G}_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\tilde{\beta}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\end{pmatrix} = 0.$$

由 $\Delta_2\cap\mathscr{G}=\{0\}$及 G 列满秩知 $\bar{G}_1(\bar{x}_1)$列满秩,因此

本文于1991年6月8日收到. 1992年5月20日收到修改稿.

$$\partial/\partial\bar{x}_{22}\tilde{\alpha}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0,\quad \partial/\partial\bar{x}_{22}\tilde{\beta}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0,$$
$$\partial/\partial\bar{x}_{22}\bar{G}_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0,\quad \partial/\partial\bar{x}_{22}\bar{f}_{21}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0.$$

由后一式知$(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in\mathscr{F}(\Delta_1)$.　　证毕.

引理 1.2　若 Δ 是任意一个受控不变非奇异对合分布，使得 $\Delta\cap\mathscr{G}=\{0\}$，则

1) 若$(\alpha_0,\beta_0)\in\mathscr{F}(\Delta)$，则有

$$\mathscr{F}(\Delta)=\{(\alpha,\beta)\,|\,d(\beta_0^{-1}(\alpha-\alpha_0))\in\Delta^{\perp},d(\beta_0^{-1}\beta)\in\Delta^{\perp}\}.$$

2) 若 x_e 是系统的一个平衡点，$(\alpha_1,\beta_1)\in\mathscr{F}_0(\Delta):=\{(\alpha,\beta)\,|\,(\alpha,\beta)\in\mathscr{F}(\Delta),\alpha(x_e)=0\}$，则任意$(\alpha,\beta)\in\mathscr{F}_0(\Delta)$，闭环系统在 Δ 过 x_e 的积分流形上的线性主部与 $f+G\alpha_1$ 的相同.

证　若$(\alpha,\beta)\in\mathscr{F}_0(\Delta)$，则

$$f+G\alpha+G\beta\bar{v}=(f+G\alpha_0)+G\beta_0\beta_0^{-1}(\alpha-\alpha_0)+G\beta_0\beta_0^{-1}\beta\bar{v}.$$

利用引理 1.1，置 $\Delta_1=\Delta_2=\Delta$，由其证明过程知

$$d(\beta_0^{-1}(\alpha-\alpha_0))\in\Delta^{\perp},\quad d(\beta_0^{-1}\beta)\in\Delta^{\perp}.$$

反之，若(α,β)满足上式，则

$$[G\beta,\Delta]=[G\beta_0(\beta_0^{-1}\beta),\Delta]=[G\beta_0,\Delta]\beta_0^{-1}\beta-L_{\Delta}(\beta_0^{-1}\beta)G\beta_0\in\Delta,$$
$$[f+G\alpha,\Delta]=[f+G\alpha_0,\Delta]+[G\beta_0(\beta_0^{-1}(\alpha-\alpha_0)),\Delta]\in\Delta.$$

这里的运算指各取单个元素或列进行运算. 因此 1)得证.

取 $\Delta^{\perp}$的基底为 dx_1，用列向量表示向量场，$\Delta=\mathrm{sp}\{\tau_1,\cdots,\tau_t\}$，$\tau_1,\cdots,\tau_t$ 是可交换的，有

$$\begin{aligned}-[f+G\alpha,\tau_i]|_{x_e}&=-[f+G\alpha_1+G\beta_1(\beta_1^{-1}(\alpha-\alpha_1)),\tau_i]|_{x_e}\\&=-[f+G\alpha_1,\tau_i]|_{x_e}-([G\beta_1,\tau_i]\beta_1^{-1}(\alpha-\alpha_1)|_{x_e}\\&\quad+(G\beta_1\langle d(\beta_1^{-1}(\alpha-\alpha_1)),\tau_i\rangle)|_{x_e})\\&=-[f+G\alpha_1,\tau_i]|_{x_e},\quad i=1,\cdots,t,\end{aligned}$$

而 $-[f+G\alpha,\tau_1]|_{x_e},\cdots,-[f+G\alpha,\tau_t]|_{x_e}$所成的矩阵最后 n-dim$x$ 行就是 $f+G\alpha$，在 Δ 的积分流形上限制的线性主部，2)得证.

定理 1.1　x_e 是系统平衡点和对合分布 Δ^* 的正则点，$\Delta^*\cap\mathscr{G}=\{0\}$，$\Delta^*$ 是含于 Kerdh 中最大受控不变分布，则

1) 含于 Δ^* 的非奇异受控不变对合分布等价于对向量场 $f+G\alpha^*$ 及 $G\beta^*$ 的列向量场不变的对合分布，这里(α^*,β^*)是 $\mathscr{F}(\Delta^*)$中任一元素.

2) 若 Δ 是 Δ^* 中的一个非奇异受控不变对合分布，则 $\mathscr{F}_0(\Delta)$中元素不改变闭环系统在 Δ 的过 x_e 的积分流形上的线性主部.

该定理由前面的引理直接可证.

2　具有指数稳定性的干扰解耦问题

考虑受干扰的非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+G(x)u+D(x)w,\\ y=h(x).\end{cases}\tag{2.1}$$

这里 w 是系统干扰，$D(x)=(d_1(x),\cdots,d_s(x))$为一列满秩矩阵，$d_i(x)$，$i\in\underline{s}$ 是光滑向量场，其余同(1.1)，称 $\mathscr{G}(x)$为输入分布，$\mathscr{D}(x):=\mathrm{sp}\{d_1(x),\cdots,d_s(x)\}$为干扰分布.

定义 2.1 系统(2.1)称为可干扰解耦，如果存在静态状态反馈 $u=\alpha(x)+\beta(x)\bar{u}$ 使闭环系统在适当的坐标下分解为如下形式：

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + G_1(x_1)\bar{u}, \tag{2.2}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) + G_2(x_1,x_2)\bar{u} + D_2(x_1,x_2)w, \tag{2.3}$$

$$y = h(x_1). \tag{2.4}$$

定义 2.2 系统具有指数稳定性的干扰解耦问题在 x_e 处可解，如果 $f(x_e)=0$，系统可干扰解耦，而且 $u=0, w=0$ 时，(2.2)，(2.3)在 x_e 处是指数稳定的.

关于具有稳定性的干扰解耦问题，已有多人作过研究，最早由 Byrnes 和 Isidori 对指数式最小相位系统讨论了具有 BIBO 稳定性的干扰解耦问题[3]，其后 Wegen 和 Nijmeijer 放松了具有指数式最小相位这个条件，讨论了系统具有强相对数而零输出限制动态是双曲型的情况[4]，其核心的概念是 Δ^* 中最大受控不变稳定分布，但[4]中没有这个分布存在的严格证明，也无计算方法. 本文指出这个分布一般不存在. Wegen 在[5]中提出了包含干扰和 Δ^* 中最大能控性分布的最小受控不变对合分布的概念来刻划干扰解耦条件下干扰的最大影响范围，但只能得到充分条件，在加了许多较强的条件后才能得到充要条件. 借助上节的讨论，本文从另一思路考虑这个问题.

定义 2.3 设 Δ 为一个非奇异对合分布，称它为受控不变能稳分布，如果满足：

i) $\mathscr{F}(\Delta)$非空；

ii) 存在$(\alpha_0(x),\beta_0(x))\in\mathscr{F}_0(\Delta)$，使得 $f(x)+G(x)\alpha_0(x)$在 Δ 过 x_e 的积分流形上限制是指数稳定的. x_e 为系统平衡点.

若具有指数稳定性的干扰解耦问题可解. $\mathrm{sp}\{\partial/\partial x_2\}$就是一个包含 $\mathscr{D}(x)$的非奇异受控不变能稳分布，若能找到含于 Kerdh 中最大受控不变能稳分布，具有指数稳定性的干扰解耦问题就迎刃而解了，[4]就是沿这一思路来做的，但这个最大的分布一般并不存在. 例如：

例 考虑系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 + u,\\
\dot{x}_2 &= x_1x_2 + k_1u,\\
\dot{x}_3 &= x_1 + x_2 - x_3 + k_2u,\\
\dot{x}_4 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + k_3u + w,\\
y &= h_1(x_1).
\end{aligned}$$

k_1,k_2,k_3 可以任意选定. 则有

$$\Delta^* = \mathrm{sp}\{\partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3, \partial/\partial x_4\}, x_e = 0$$

是系统平衡点，$\Delta^*\cap\mathscr{G}=\{0\}$，$\Delta_1=\mathrm{sp}\{\partial/\partial x_3,\partial/\partial x_4\}$和 $\Delta_2=\mathrm{sp}\{x_1\partial/\partial x_2+\partial/\partial x_3,\partial/\partial x_4\}$是两受控不变能稳分布，不在 x_e 处时 $\Delta_1+\Delta_2=\Delta^*$，而 Δ^* 不是能稳定的，因而没有包含 Δ_1,Δ_2 的受控不变对合非奇异的能稳分布.

引理 2.1 $\langle f,g_1,\cdots,g_m,d_1,\cdots,d_s|d_1,\cdots,d_s\rangle$是包含干扰分布 $\mathscr{D}(x)$的最小受控不变对合分布.

由[2]中的讨论直接可知以上引理成立，并已给出这个分布的计算方法. 若$(\alpha^*,\beta^*)\in\mathscr{F}(\Delta^*)$，由受控不变最小分布的含义知$\langle f+G\alpha^*, G\beta^*, D|D\rangle$就是$\langle f,G,D|D\rangle$，这里

$G, G\beta^*, D$ 表其列向量场集合，由此可得：

定理 2.1 若 $\mathscr{G} \cap \Delta^* = \{0\}$，$\mathscr{D} \subset \Delta^*$，$x_e$ 是系统的平衡点及分布 Δ^* 和 $\langle f+G\alpha^*, G\beta^*, D|D\rangle$ 的正则点，则系统具有指数稳定性的干扰解耦问题可解的充要条件是：

1) $\langle f+G\alpha^*, G\beta^*, D|D\rangle$ 是受控不变能稳分布.

2) 原系统对以上分布的商系统的近似线性化系统能稳定.

证 充分性显然，下证必要性.

设 (α_0, β_0) 为实现系统指数稳定地干扰解耦的静态状态反馈，闭环系统在适当局部坐标下为 2.2，2.3，2.4 的形式，由引理 2.1 知 $\langle f+G\alpha^*, G\beta^*, D|D\rangle \subset \Delta := \mathrm{sp}\{\partial/\partial x_2\}$，不妨设 2.3 可以写成

$$\dot{x}_{21} = f_{21}(x_1, x_{21}) + G_{21}(x_1, x_{21})\bar{u}, \tag{2.5}$$

$$\dot{x}_{22} = f_{22}(x_1, x_{21}, x_{22}) + G_{22}(x_1, x_{21}, x_{22})\bar{u} + D(x_1, x_2)w. \tag{2.6}$$

且 $\langle f+G\alpha^*, G\beta^*, D|D\rangle \subset \Delta := \mathrm{sp}\{\partial/\partial x_{22}\}$. 这是由引理 1.1 知 f_{21}, G_{21} 中不含 x_{22}.

由于此时闭环系统是指数稳定的，而且 $\partial f/\partial x|_{x_e}$ 为分块下三角矩阵，因此 $\partial f_{22}/\partial x_{22}|_{x_e}$ 及 $\partial f_1/\partial x_1|_{x_e}$ 的谱都是稳定的，得证.

可以看出，前面例子中 $\langle f+G\alpha^*, G\beta^*, D|D\rangle = \mathrm{sp}\{\partial/\partial x_4\}$，因此系统具有指数稳定性的干扰解耦问题在 $x_e = 0$ 处可解.

有如下等价定理：

定理 2.2 在定理 2.1 的条件下，系统具有指数稳定性的干扰解耦问题在 x_e 处可解的充分必要条件是

1) 存在一组可交换向量场 $\rho_1, \cdots, \rho_\mu$ 张成 $\langle f, G, D|D\rangle$，使得下面定义的矩阵 C 在 x_e 处是一个特征根全在左开复半平面的方阵

$$[f + G\alpha^*, \rho_i] = \sum_{j=1}^{l} C_{ij}\rho_j, \quad i = 1, \cdots, \mu.$$

2) 存在恰当的微分形式 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-\mu}$ 张成 $\langle f, G, D|D\rangle^{\perp}$，记 $A = (a_{ij}|_{x_e})$，$B = (b_{ij}|_{x_e})$，

$$L_{f+G\alpha^*} w_i = \sum_{j=1}^{n-\mu} a_{ij} w_j, \quad i = 1, \cdots, n-\mu,$$

$$b_{ij} = \langle w_i, g_j^* \rangle, \quad i = 1, \cdots, n-\mu, \ j = 1, \cdots, m,$$

则 (A, B) 是能稳的.

由定理 2.1 知，两个"存在"都可改为"任意". 注意到包含 $\mathscr{D}$ 的最小受控不变对合分布是一个全局的概念，不难把以上结论推广到全局的情形.

当 $\mathscr{G} \cap \Delta^* \neq \{0\}$ 时，可有如下充分性条件：

定理 2.3 若 x_e 是系统(2.1)的平衡点和 $\langle f, G, D|D\rangle$ 的正则点，如果 $(\alpha, \beta) \in \mathscr{F}_0(\langle f, G, D|D\rangle)$ 使系统化为

$$\dot{\bar{x}}_1 = f_1(\bar{x}_1) + G_1(\bar{x}_1)u_1, \tag{2.7}$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + G_{21}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_1 + G_{22}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)u_2 + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2)w, \tag{2.8}$$

$$y = h(\bar{x}_1). \tag{2.9}$$

且系统 2.7 指数稳定，2.8 中的 (f_2, G_{22}) 在 x_e 处的一阶近似系统能稳.

则局部具有指数稳定性的干扰解耦问题可解.

参考文献

[1] Wonham. Linear Multivarible Control: A Geometric Approach. Berlin, Springer-Verlag, 1979

[2] Isidori, A.. Nonlinear Control Systems: An Introduction. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1985

[3] Byrnes, C. I. and Isidori, A.. Nonlinear Disturbance Découpling with Stability. in Proc. of the 26th Conf. On Decision and Control

[4] Der Wegen, L. V. and Nijmeijer, H.. The Local Disturbance Decoupling Problem with Stability for Nonlinear Systems. Sys. & Contr. Lett., 1989, 12:139—149

[5] Der Wegen, L. V.. Another Approach to the Distuebance Decoupling Problem with Stability for Nonlinear Systems. in Proc. of the Int. Symposium MTNS, 1989, 465—472

[6] 蒋丹墀. 一类非线性系统局部具有指数稳定性的干扰解耦问题. 华东师范大学数学系硕士研究生毕业论文, 1990

Local Disturbances Decoupling Problem with Exponential Stability

JIANG Danchi

(Department of Mathematics, Guizhou University · Guizhou, 550025, PRC)

ZHENG Yufan

(Department of Mathematics, East China Normal University · Shanghai, 200062, PRC)

Abstract: In this paper, a collection of nonlinear control systems is considered, whose kernal of the output mapping does not contain nonzero controllability distribution. The minimum controlled invariant involutive distribution containing disturbances is introduced to obtain a sufficient and necessary condition for the local disturbances decoupling problem with exponential stability. Some results are generalized to common nonlinear control systems.

Key words: disturbances decoupling; exponential stability; controlled invariant distribution containing disbances; nonlinear control systems

本文作者简介

蒋丹墀 1964 年生. 1984 年毕业于武汉大学数学系. 1990 年毕业于华东师范大学数学系并获硕士学位. 1984 至今在贵州大学数学系任教. 研究兴趣为非线性控制系统理论, 常微分方程稳定性.

郑毓蕃 1941 年生. 1965 年毕业于上海华东师范大学数学系. 后在该校担任助教、讲师. 1986 年任数学系教授. 1980 年至 1981 年在加拿大多伦多大学进修, 八十年代曾在欧洲、美国、日本近十所大学研究所担任客籍教授, 讲学或做短期研究. 1991 年 7 月～1992 年 7 月应法国国家科学研究中心聘任南特自动化实验主任研究员及中央大学南特分校大学教授. 目前研究兴趣在非线性控制理论及其应用方面.