第10卷第4期
1993年8月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 4
Aug., 1993

带有时滞的随机大系统的稳定性*

冯昭枢　刘永清　郭锋卫

(华南理工大学自动化系·广州,510641)

摘要:本文对带有时滞的随机大系统给出了滞后无关均方渐近稳定性的定义和判据,所讨论的随机大系统具有随机互联结构.

关键词:大系统;稳定性;随机系统;时滞;李雅普诺夫函数

1 引　言

随机大系统的稳定性问题已被许多文献讨论过,例如[1~6].然而,绝大多数已有文献仅仅对不带时滞的随机大系统进行讨论,而只有极个别文献对时滞随机大系统讨论其稳定性(见[7]).本文的目的,就是对带有时滞的随机大系统(具有随机互联结构),给出滞后无关均方渐近稳定性的定义,利用作者建立的时滞随机系统的稳定性判据(见[8]和[9]),并利用时滞确定性系统滞后无关渐近稳定性的结论(见[10]),建立该类随机大系统为滞后无关均方渐近稳定的判据.

2 系统描述与引理

考虑由下面 Ito 随机微分差分方程描述的随机大系统

$$\mathrm{d}x_i(t)=A_ix_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m_i}F_{ij}x_i(t)\mathrm{d}z_{ij}(t)+\sum_{k=1}^{N}A_{ik}x_k(t-r)\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}G_{kj}^{i}x_k(t-r)\mathrm{d}z_{kj}(t),\quad i=1,\cdots,N. \tag{2.1}$$

其中 $x_i\in \mathrm{R}^{n_i}$是第 i 个子系统的状态变量,A_i 和 F_{ij}均为 $n_i\times n_i$ 常矩阵,A_{ik}和 G_{kj}^i均为 $n_i\times n_k$ 常矩阵,r 为非负实数,$z_i=(z_{i1},\cdots,z_{im_i})^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{m_i}$,$z_i=\{z_i(t),t\geqslant 0\}$是一个定义在完全概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上具有独立分量的 m_i 维规范化维纳过程.通过引入下面的记号

$$\sum_{i=1}^{N}n_i=n,\quad \sum_{i=1}^{N}m_i=m,\quad x(t)=(x_1^{\mathrm{T}}(t),\cdots,x_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},\quad z(t)=(z_1^{\mathrm{T}}(t),\cdots,z_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},$$

可把随机大系统(2.1)表示成下面的等价形式

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),x(t-r))\mathrm{d}t+\sigma(x(t),x(t-r))\mathrm{d}z(t). \tag{2.2}$$

其中 f 和 σ 是具有适当维数的映射.

具有分解形式(2.1)的随机大系统(2.2)可看成是下面 N 个孤立子系统的一个相互联结

* 国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.
本文于1991年4月29日收到.

$$dx_i(t) = A_i x_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m_i} F_{ij} x_i(t) dz_{ij}(t), \quad i = 1,\cdots N. \tag{2.3}$$

定义 2.1 称带有时滞的随机大系统(2.2)是滞后无关均方渐近稳定的，如果对任意非负实数 r，随机大系统(2.2)的平衡态 $x(t)\equiv 0$ 是均方渐近稳定的.

考虑下面的一维时滞确定性系统

$$\dot{u}(t) = -au(t) + bu(t-r). \tag{2.4}$$

定义 2.2 如果对于任意非负实数 r，时滞确定性系统(2.4)的平衡态 $u(t)\equiv 0$ 均为渐近稳定的，就称(2.4)是滞后无关渐近稳定的(或称为无条件稳定，参见[10]).

引理 2.1[10] 对于一维时滞确定性系统(2.4)，如果 $a>0, b>0$，且 $a-b>0$，则(2.4)是滞后无关渐近稳定的.

引理 2.2[11] 对任意 $u,v\in \mathrm{R}^n, A=(a_{ij})_{n\times n}, c>0$，成立

$$c|u|^2 + u^{\mathrm{T}}Av \leqslant -\frac{1}{2c}|u|^2 + \frac{1}{2c}|A|^2|v|^2.$$

其中 $|A|$ 为欧氏范数诱导的矩阵 A 的范数.

3 主要结果

定理 3.1 对时滞随机大系统(2.1)，假设存在正数 α_i，$n_i\times n_i$ 维定正对称矩阵 P_i 和 $Q_i, i=1,\cdots,N$，使得下列条件成立：

1) $A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^{m_i} F_{ij}^{\mathrm{T}}P_iF_{ij} = -Q_i, \quad i=1,\cdots,N$;

2) $a_0 - \sum_{i=1}^{N} a_i - \sum_{i=1}^{N} b_i > 0$，其中 a_0, a_i, b_i 定义如下

$$a_0 = \min_{1\leqslant i\leqslant N}\{\lambda_m(Q_i)/[2\lambda_M(P_i)]\},$$

$$a_i = \frac{2N\alpha_i}{\lambda_m(Q_i)}\max\{|P_iA_{ik}|^2/[\alpha_k\lambda_m(P_k)]\}, \quad i = 1,\cdots,N,$$

$$b_i = \alpha_i \max_{1\leqslant k\leqslant N}\{|\lambda_M(D_k^i)/[\alpha_k\lambda_m(P_i)]\}, \quad i = 1,\cdots,N.$$

这里 $D_k^i = \sum_{j=1}^{m_k}(B_{kj}^i)^{\mathrm{T}}P_iB_{kj}^i, i,k=1,\cdots,N, \lambda_m(\cdot)$ 和 $\lambda_M(\cdot)$ 分别表示最小和最大特征值.

则随机大系统(2.1)是滞后无关均方渐近稳定的.

证 根据定理的假设，对每个孤立子系统(2.3)选取如下的李雅普诺夫函数

$$V_i(x_i) = x_i^{\mathrm{T}}P_ix_i, \quad i = 1,\cdots,N. \tag{3.1}$$

记 L_i 为孤立子系统(2.3)确定的微分生成算子(见[8]和[9])，有

$$\begin{aligned} L_iV_i(x_i(t), x_i(t-r)) &= x_i^{\mathrm{T}}(t)(A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^{m_i} F_{ij}^{\mathrm{T}}P_iF_{ij})x_i(t) \\ &\leqslant -\lambda_m(Q_i)|x_i(t)|^2, \quad i = 1,\cdots,N. \end{aligned} \tag{3.2}$$

对整个大系统(2.1)，选取李雅普诺夫函数为

$$V_i(x) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_iV_i(x_i). \tag{3.3}$$

其中 α_i 由定理的假设给出，V_i 由(3.1)确定. 对于(3.2)选取的 V，存在正数 k_1 和 k_2 使得

$$k_1|x|^2 \leqslant V(x) \leqslant k_2|x|^2. \tag{3.4}$$

记 L 为随机大系统(2.2)确定的微分生成算子,我们得到

$$LV(x(t),x(t-r))=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{L_iV_i(x_i(t),x_i(t-r))+\sum_{k=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)[2P_iA_{ik}x_k(t-r)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}x_k^{\mathrm{T}}(t-r)[\sum_{j=1}^{m_k}(B_{kj}^i)^{\mathrm{T}}P_iB_{kj}^i]x_k(t-r)\}. \tag{3.5}$$

对上式应用(3.2)和引理 2.2,得

$$LV(x(t),x(t-r))\leqslant\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{-\lambda_m(Q_i)|x_i(t)|^2+\sum_{k=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)[2P_iA_{ik}x_k(t-r)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}x_k^{\mathrm{T}}(t-r)D_k^ix_k(t-r)\}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{\sum_{k=1}^{N}[-\frac{1}{N}\lambda_m(Q_i)|x_i(t)|^2+x_i^{\mathrm{T}}(t)(2P_iA_{ik})x_i(t-r)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}x_k^{\mathrm{T}}(t-r)D_k^ix_k(t-r)\}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{\sum_{k=1}^{N}[-\frac{1}{2N}\lambda_m(Q_i)|x_i(t)|^2+\frac{2N}{\lambda_m(Q_i)}|P_iA_{ik}|^2|x_k(t)|^2]$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\lambda_M(D_k^i)|x_k(t-r)|^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{[-\frac{1}{2}\lambda_m(Q_i)|x_i(t)|^2+\frac{2N}{\lambda_m(Q_i)}\sum_{k=1}^{N}|P_iA_{ik}|^2|x_k(t-r)|^2$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\lambda_M(D_k^i)|x_k(t-r)|^2\}$$

$$\leqslant-a_0V(x(t))+\sum_{k=1}^{N}a_iV(x(t-r))+\sum_{k=1}^{N}b_iV(x(t-r)). \tag{3.6}$$

其中 $a_0,a_i,b_i(i=1,\cdots,N)$ 由条件(2)给出.

考虑下面的确定性辅助系统

$$\dot{u}(t)=-a_0u(t)+\sum_{i=1}^{N}a_iu(t-r)+\sum_{i=1}^{N}b_iu(t-r). \tag{3.7}$$

根据条件(2)和引理 2.1,可知时滞确定性系统(3.7)是滞后无关渐近稳定的.这就是说,对于任意非负实数 r,(3.7)的平衡态 $u(t)\equiv0$ 是渐近稳定的.因而,对于任意给定的非负实数 r,应用[9]中的定理,得到随机大系统(2.2)的平衡态 $u(t)\equiv0$ 是均方渐近稳定的,也即是滞后无关均方渐近稳定的.　　证毕.

参 考 文 献

[1] Michel, A. N. and Miller, R. K.. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. New York: Academic Press, 1977, Chapter 4

[2] Siljak, D. D.. Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure. New York: North-Holland, 1978, Chapter 4 and

[3] Jumarie, G.. An Approach, via Entropy, to the Stability of Random Large-Scale Sampled-Data Systems Under Structural Perturbations. Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement and Control, 1982, 104:49—57

[4] Socha, L.. The Asymptotic p-Stability of Composite Stochastic Systems. Int. J. Systems Sci., 1986, 17(3):465—477

[5] Socha, L.. The Asymptotic Stochastic Stability in Large of the Composite Stochastic Systems. Automatica, 1986, 22(5):605—610

[6] Popp, K., Socha, L. and Windrich, H.. Moment Stability of Linear Stochastic Non-Triangular Large-Scale Systems. Int. J. Systems Sci., 1988, 19(5):733—746

[7] Chang Mou-Hsiung. Stability of Interconnected Stochastic Delay Systems. Applied Mathematics and Computation, 1985, 16:277—295

[8] 冯昭枢,郭锋卫.泛函微分不等式与时滞随机系统(Ⅰ):比较原理.青年论文荟萃——常微分方程专辑.北京:科学出版社,1991

[9] 冯昭枢,郭锋卫.泛函微分不等式与时滞随机系统(Ⅱ):稳定判据.青年论文荟萃——常微分方程专辑.北京:科学出版社,1991

[10] 秦元勋,刘永清,王联,郑祖庥.带有时滞的动力系统的运动稳定性(第二版).北京:科学出版社,1989

[11] 冯昭枢.随机大系统的稳定性与镇定.华南理工大学自动化系博士学位论文,1990

[12] Liu Yongqing and Chian, Paul K. C.. Stability, Stabilization and Control fo Large Scale Systems. Beijing:Science Press, 1989

[13] 冯昭枢,刘永清.随机泛函微分方程稳定性理论中的比较原理.科学通报,1990, 14:1116

Stability of Stochastic Large Scale Systems with Time-Delays

FENG Zhaoshu, LIU Yongqing and GUO Fengwei

(Department of Automation, South China University of Technology • Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: The definitions and criteria of delay-independent mean-square asymtotic stability are given for stochastic large scale systems with time-delay. The stochastic large scale systems discussed in this paper possess random interconnected structure.

Key words: large scale system; stability; stochastic system; time-delay; Lyapunov function

本文作者简介

冯昭枢 见本刊 1993 年第 2 期第 134 页.

刘永清 见本刊 1993 年第 2 期第 134 页.

郭锋卫 1966 年生. 10984 年和 1987 年在南京大学分别获数学专业的理学学士和理学硕士学位. 1990 年至今在华南理工大学自动化系攻读博士学位. 当前的研究领域是随机系统和随机大系统的稳定性与镇定.