

计算机的计算延时对二次型性能指标的影响

孙增圻 金亿创

(清华大学计算机系·北京, 100084)

摘要: 本文针对具有计算延时的计算机控制系统, 首先求出离散的闭环状态方程, 然后将指标函数及其导数化为闭环状态的二次型函数, 最后通过求解李雅普诺夫方程解出它们, 从而可分析计算延时对系统性能的影响。

关键词: 计算机控制; 计算延时; 二次型性能函数

1 引言

在计算机控制系统中, A/D 和 D/A 转换、控制算法的实现等都需要一定的时间, 因此控制量的输出时刻要比采样时刻晚一定的时间, 这段时间称为计算延时。由于输出采样和控制采样不同步, 它将给系统的分析和设计带来困难。通常在进行系统设计时并不考虑计算延时的影响, 而实际上它将使系统的性能变差甚至出现不稳定。已有不少人对此进行了研究^[1,2,3]。本文即是针对这种情况, 解决了考虑计算延时时计算系统性能指标及其对计算延时的灵敏度问题。

2 问题描述

考虑计算延时的计算机控制系统可用如图 1 所示的结构来表示。

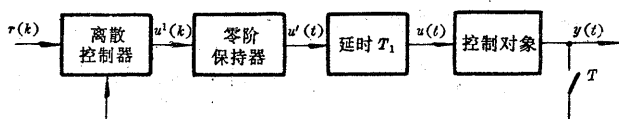


图 1 考虑计算延时的计算机控制系统

为了便于后面的系统分析, 以使得输出采样和控制采样为同一时刻, 图中将计算延时放到零阶保持器的后面, 它对系统性能的影响与实际情况是等效的。同时不失一般性, 假设 $r(k)=0$, 只考虑系统对非零初始条件的响应, 且采用二次型性能函数作为系统性能的度量。因而问题可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

系统的性能指标函数为
$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_1 x + u^T Q_2 u) dt. \quad (2)$$

控制器设为如下两种类型:

直接状态反馈
$$u'(k) = -Lx(k). \quad (3)$$

一般动态反馈
$$\begin{cases} x_c(k+1) = Fx_c(k) + G_y(k), \\ u'(k) = Cx_c(k) + D_y(k), \end{cases} \quad (4)$$

零阶保持器
$$u'(t) = u'(k), \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad (5)$$

延时

$$u(t) = u'(t - T_1), \quad 0 \leq T_1 \leq T. \quad (6)$$

其中 $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^r, x_0 \in R^n, Q$ 和 R 均为非负定对称阵, T 为采样周期, T_1 为计算延时. 要求计算性能指标函数 J 及 $\partial J / \partial T_1$.

3 算法原理

3.1 对象和性能指标的离散化

式(1)和(2)可以离散化为^[4,6]

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{F}\bar{x}(k) + \bar{G}u'(k), \\ y(k) = \bar{C}\bar{x}(k), \end{cases} \quad (7)$$

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{x}^T(k) \hat{Q}_1 \bar{x}(k) + 2\bar{x}^T(k) \hat{Q}_{12} u'(k) + u'^T(k) \hat{Q}_2 u'(k)]. \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u'(k-1) \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} F & G_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} G_2 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad 0], \\ \hat{Q}_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_2 = \begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q}_2 = Q_{33}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} F = F(T), \quad G_2 = G(T - T_1), \quad G_1 = G(T) - G_2, \\ Q_{11} = Q_{41}(T), \quad Q_{22} = G^T(T_1)Q_{41}(T - T_1)G(T_1) + Q_{42}(T_1), \\ Q_{12} = F^T(T_1)Q_{41}(T - T_1)G(T_1) + Q_{412}(T_1), \\ Q_{13} = F^T(T_1)Q_{412}(T - T_1), \quad Q_{23} = G^T(T_1)Q_{412}(T - T_1), \\ Q_{33} = Q_{42}(T - T_1). \end{cases} \quad (10)$$

以上各式中的符号意义如下

$$\begin{cases} F(t) = e^{At}, \quad G(t) = B \int_0^t e^{A\tau} d\tau, \\ Q_{41}(t) = \int_0^t F^T(\tau) \bar{Q}_1 F(\tau) d\tau, \quad Q_{412}(t) = \int_0^t F^T(\tau) \bar{Q}_1 G(\tau) d\tau, \\ Q_{42}(t) = \int_0^t G^T(\tau) \bar{Q}_1 G(\tau) d\tau + \bar{Q}_2 t. \end{cases} \quad (11)$$

参考文献[5]和[6]给出了计算式(11)的具体算法.

3.2 J 的计算

将式(3)代入式(7)和式(8)可得直接状态反馈时的闭环状态方程和性能指标函数为

$$\bar{x}(k+1) = H\bar{x}(k), \quad (12)$$

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{x}^T(k) Q \bar{x}(k). \quad (13)$$

其中

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u'(k-1) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} F - G_2 L & G_1 \\ -L & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} + L^T Q_{33} L - Q_{13} L - L^T Q_{13}^T & Q_{12} - L^T Q_{23}^T \\ Q_{12}^T - Q_{23} L & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

将式(4)代入式(7)和式(8)并加以整理可得一般动态反馈时的闭环状态方程和性能指标函数的表达式仍如式(12)和(13)所示, 其中

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u'(k-1) \\ x_c(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \\ x_c(0) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} F + G_2 D_c C & G_1 & G_2 C_c \\ D_c C & 0 & C_c \\ G_c C & 0 & F_c \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} + Q_{13} D_c C + C^T D_c^T Q_{13}^T + C^T D_c^T Q_{33} D_c C & Q_{12} + C^T D_c^T Q_{23}^T & Q_{13} C_c + C^T D_c^T Q_{33} C_c \\ Q_{12}^T + Q_{23} D_c C & Q_{22} & Q_{23} C_c \\ C_c^T Q_{13}^T + C_c^T Q_{33} D_c C & C_c^T Q_{23}^T & C_c^T Q_{33} C_c \end{bmatrix}.$$

根据式(12)和(13)可以求得

$$J = \bar{x}^T(0) S \bar{x}(0). \quad (14)$$

其中 S 满足如下的离散李雅普诺夫方程

$$S = H^T S H + Q, \quad (15)$$

参考文献[7]给出了求解上述方程的具体算法。

3.3 $\partial J / \partial T_1$ 的计算

将 $\partial J / \partial T_1$ 简写为 J , 其它符号也同此, 则有

$$J = \bar{x}^T(0) S \bar{x}(0), \quad (16)$$

$$\dot{S} = H^T \dot{S} H + (\dot{Q} + H^T S H + H^T S \dot{H}), \quad (17)$$

对于直接状态反馈的情况有

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} F(T - T_1)BL & F(T - T_1)B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} + L^T \dot{Q}_{33} L - \dot{Q}_{13} L - L^T \dot{Q}_{13}^T & \dot{Q}_{12} - L^T \dot{Q}_{23}^T \\ \dot{Q}_{12}^T - \dot{Q}_{23} L & \dot{Q}_{22} \end{bmatrix}.$$

对于一般动态反馈时有

$$H = \begin{bmatrix} -F(T - T_1)BD_c C & F(T - T_1)B & -F(T - T_1)BC_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} + \dot{Q}_{13} D_c C + C^T D_c^T \dot{Q}_{13}^T + C^T D_c^T \dot{Q}_{33} D_c C & \dot{Q}_{12} + C^T D_c^T \dot{Q}_{23}^T & \dot{Q}_{13} C_c + C^T D_c^T \dot{Q}_{33} C_c \\ \dot{Q}_{12}^T + \dot{Q}_{23} D_c C & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{23} C_c \\ C_c^T \dot{Q}_{13}^T + C_c^T \dot{Q}_{33} D_c C & C_c^T \dot{Q}_{23}^T & C_c^T \dot{Q}_{33} C_c \end{bmatrix}.$$

其中

$$\dot{Q}_{11} = 0, \quad \dot{Q}_{22} = B^T Q_{a1}(T - T_1)G(T_1) + G^T(T_1)Q_{a1}(T - T_1)B + \bar{Q}_2,$$

$$\dot{Q}_{33} = -[G^T(T - T_1)\bar{Q}_1 G(T - T_1) + \bar{Q}_2], \quad \dot{Q}_{12} = F^T(T_1)Q_{a1}(T - T_1)B,$$

$$\dot{Q}_{13} = -F^T(T_1)Q_{a1}(T - T_1)B, \quad \dot{Q}_{23} = B^T Q_{a12}(T - T_1) - G^T(T_1)Q_{a1}(T - T_1)B.$$

通过求解式(17)所示的李雅普诺夫方程解得 $\dot{S}$, 再代入式(16)即求得 $J \triangleq \partial J / \partial T_1$.

4 计算举例

设控制对象的状态方程系数矩阵及加权阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_2 = 0.1.$$

设采样周期 $T=1$ 秒, 若不考虑计算延时, 算得采样系统的最优状态反馈控制规律为^[5]

$$L = [2.232 \quad 5.866].$$

设状态初值为 $x(0)=[1 \ 0]^T$, 利用本文的结果, 考虑计算延时 T_1 的影响算得 $J(T_1)$ 和 $\partial J/\partial T_1$ 如图 2 所示. 从图中看出, $J(T_1)$ 和 $\partial J/\partial T_1$ 均随着 T_1 的增大而增大, 当计算延时接近一个采样周期时(实际系统通常出现这样的情况), 系统的性能明显变差.

5 结束语

计算延时是计算机控制系统特有的问题, 它常常为人们所忽略. 但当计算延时与采样周期相比并非很小时, 它对系统性能的影响常常是不可忽略的. 本文给出了一种定量计算这种影响的方法, 它对于计算机控制系统的分析和设计是十分有用的.

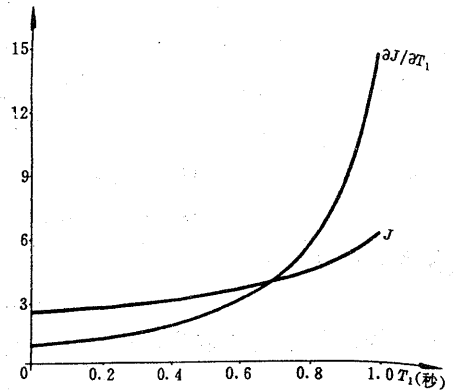


图 2 考虑计算延时时的系统性能

参 考 文 献

- [1] Delfour, M. C. . Linear Optimal Control of Systems with State and Control Variable Delays. *Automatica*, 1984, 20(1), 69—77
- [2] Cilead, T. . Optimal Controls and Their Discontinuities in Quadratic Problem of Delay System. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1985, AC-30(7):666—673
- [3] Åström, K. J. and Wittenmark, B. . *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall, 1984
- [4] 李卫, 孙增圻. 包含延时的采样系统的最优控制. *控制理论与应用*, 1987, 4(2):10—18
- [5] 孙增圻. 采样控制系统中线性二次型最优控制器的设计. *自动化学报*, 1983, 9(3):191—198
- [6] 孙增圻. *计算机控制理论及应用*. 北京:清华大学出版社, 1989
- [7] 孙增圻, 袁曾任. *计算机辅助设计控制系统*. 北京:清华大学出版社, 1988

The Effect of Computation Delay on Quadratic Performance Index

SUN Zengqi and JIN Yichuang

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University • Beijing, 100084, PRC)

Abstract: The effect of computation delay is considered in computer controlled systems. The discrete closed-loop state equations are first derived. The performance function and its derivative with respect to the delay are then expressed by the closed-loop states and finally computed by solving Lyapunov equations.

Key words: computer control; computation delay; quadratic performance index

本文作者简介

孙增圻 1943年生. 1966年毕业于清华大学自动控制系, 留校任教. 1979年至1981年赴瑞典进修, 获博士学位. 1990年赴美访问研究半年. 现为清华大学计算机系教授. 主要从事的研究工作包括控制系统CAD, 计算机控制理论及最优控制. 现主要研究领域为智能控制、机器人控制和仿真.

金亿创 1962年生. 1984年毕业于清华大学计算机系, 留校读研究生. 1987年获硕士学位, 现为该单位博士研究生. 从1990年起赴英国访问研究至今. 主要从事控制系统CAD, 计算机控制理论, 机器人智能控制及仿真等的研究. 现主要研究领域为神经元控制.