串行加工线阻塞问题的建模及分析*

赵千川　郑大钟
(清华大学自动化系·北京,100084)

摘要：本文考虑具有有限缓冲容量的串行生产线的阻塞问题. 建立了其在极大代数意义下的线性模型,并在此基础上给出了不发生阻塞的参数化条件.

关键词：串行生产线；阻塞；极大代数

1 引　言

考虑 m 台机器加工 n 种工件的缓冲器容量有限的串行生产线. 文[1,2,3]曾提出了串行生产线的线性模型,但因未考虑有限缓冲问题,从而未涉及阻塞问题. 而所有实际的生产线都是有限缓冲的,阻塞现象普遍存在,并对系统的运行产生影响,需要在建模时加以考虑. 有无阻塞关系到系统的性能(特别是机器空闲造成的损失高于增加缓冲器费用的情况),因而讨论无阻塞条件是有意义的. 文[4]已建立了考虑有限缓冲的一类系统模型,本文要建立的模型与之相比,可以使缓冲器容量不影响模型的状态数,并且在此基础上易于建立系统的无阻塞条件.

2 加工参数确定时的主要结果

首先引入一些符号. 用字母 i 和 k 分别表示机器和工件的序号. 用 $P_i(k)$ 表示工件 k 在机器 M_i 上的加工时间即加工参数,且约定 $k\leqslant 0$ 或 $i\geqslant m+1$ 时有 $P_i(k)=0$. 用 $S_i(k)$, $F_i(k)$ 和 $X_i(k)$ 分别表示工件 k 在 M_i 上的加工开始、完成和离开时刻. 显然,对于所讨论的系统有 $F_i(k)\equiv S_i(k)+P_i(k)$. 活动 $O_i(k)\triangle[S_i(k),\ X_i(k)]$. 若 $F_i(k)<X_i(k)$ 则称 $O_i(k)$ 阻塞. 设机器 M_i 之前的缓冲器 B_i 的容量为 b_i,若无缓冲则有 $b_i=0$,并约定 $b_1=b_{m+1}=\infty$. 总是规定 $k\leqslant 0$ 时有 $X_i(k)=0, i=1,2,\cdots,m$ 和 $i=0$ 时有 $X_i(k)=0, k=1,2,\cdots,n$. $\prod\limits_{j=n_1}^{n_2}$ 或 $\sum\limits_{j=n_1}^{n_2}$ 在 $n_1>n_2$ 时规定为无此项.

先来建立系统的模型.

命题 1　有限缓冲的串行加工线在给定加工参数下的加工过程服从如下递推状态方程

$$X_i(k+1)=P_i(k+1)\odot(X_{i-1}(k+1)\oplus X_i(k))\oplus X_{i+1}(k-b_{i+1}),$$
$$k=0,1,\cdots,n-1;\ i=1,2,\cdots,m. \tag{1}$$

其中"$\odot$"和"$\oplus$"分别为极大代数上的乘和加运算[5].

证　略.

* 国家自然科学基金和863高技术自动化领域CIMS主题资助项目.
本文于1992年10月28日收到. 1993年4月14日收到修改稿.

依阻塞定义，$O_i(k)$无阻塞意味着：

$$X_i(k)=F_i(k). \tag{2}$$

推论 1　有限缓冲的串行加工线，当加工参数确定时，无阻塞条件为满足如下的“无阻塞方程”

$$X_i(k+1)=P_i(k+1)\odot(X_{i-1}(k+1)\oplus X_i(k)),$$
$$k=0,1,\cdots,n-1;\ i=1,2,\cdots m. \tag{3}$$

对于刚性加工线，$b_i=0$，$i=2,\cdots,m$，由(1)式可导出其线性递推方程

$$X_i(k+1)=\begin{cases}P_i(k+1)\odot X_i(k)\oplus X_{i+1}(k), & i=1,\\ P_i(k+1)\odot X_{i-1}(k+1)\oplus X_{i+1}(k), & i\geqslant 2.\end{cases} \tag{4}$$

下面进一步把状态方程(1)化成矩阵形式. 以下约定乘法均为极大代数意义下的.

命题 2　(1) 有等价形式

$$\begin{bmatrix}X_1(k+1)\\ \vdots\\ X_m(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1(k+1) & & \mathscr{E}\\ \vdots & \ddots & \\ P_{1\cdots m}(k+1) & \cdots & P_m(k+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(k)\\ \vdots\\ X_m(k)\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & & \mathscr{E}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0\\ \mathscr{E} & & & \varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(k+b_1)\\ \vdots\\ X_m(k-b_m)\end{bmatrix}. \tag{5}$$

其中 ε 为极大代数中的零元，$\mathscr{E}$ 表示三角 ε 阵. $P_{j\cdots i}(k+1)\triangleq\prod_{l=j}^{i}{}_{\odot}P_l(k+1)$，$k=0,1,\cdots,n-1$.

推论 2　刚性加工线满足

$$\begin{bmatrix}X_1(k+1)\\ \vdots\\ X_m(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1(k+1) & 0 & & \mathscr{E}\\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \ddots & & 0\\ P_{1\cdots m}(k+1) & & \cdots & P_m(k+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(k)\\ \vdots\\ \vdots\\ X_m(k)\end{bmatrix}. \tag{6}$$

对于无阻塞方程，也可证明其有等价形式

$$\mathbf{X}(k+1)=\mathbf{P}(k+1)\mathbf{X}(k). \tag{7}$$

其中

$$\mathbf{X}(k)\triangleq[X_1(k),\cdots,X_m(k)]^{\tau}$$

$$\mathbf{P}(k)\triangleq\begin{bmatrix}P_1(k) & & \mathscr{E}\\ \vdots & \ddots & \\ P_{1\cdots m}(k) & \cdots & P_m(k)\end{bmatrix},\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

再令

$$\mathbf{E}\triangleq\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & & \mathscr{E}\\ & & \ddots & \\ & \ddots & & 0\\ \mathscr{E} & & & \varepsilon\end{bmatrix}$$

$$E_j \triangleq \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j\text{列} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & & & & \\ & \ddots & \vdots & \mathscr{E} & \\ & & \ddots & & \\ & & 0 & \cdots\cdots & \\ & & & \ddots & \\ & \mathscr{E} & & & \ddots \\ & & & & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array} j\text{行}, \quad E_j \triangleq \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j\text{列} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & \ddots & & & & \\ & \ddots & \varepsilon & \vdots & \mathscr{E} & \\ & & \ddots & 0 & \cdots\cdots & \\ & & & \varepsilon & \varepsilon & \\ & \mathscr{E} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array} j-1\text{行},$$

$$\prod_{j=1}^{k}{}_{\odot} P(j) \triangleq P(k)P(k-1)\cdots P(1).$$

则由(7)进一步得到

$$X(k+1) = [\prod_{j=1}^{k+1}{}_{\odot} P(j)]X(0). \tag{8}$$

有了以上准备，可以进而讨论生产线无阻塞的参数化判据.

先考虑刚性生产线：由推论 2 和推论 1 可得：

引理 1　约定初始加工时刻 $X(0)=0$，则刚性加工线不发生阻塞时加工满足以下关系式

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} P_1(k+1) \odot \prod_{j=1}^{k}{}_{\odot} P_1(j) \\ \vdots \\ P_{1\cdots i}(k+1) \odot \prod_{j=1}^{k}{}_{\odot} P_1(j) \\ \vdots \\ P_{1\cdots m}(k+1) \odot \prod_{j=1}^{k}{}_{\odot} P_1(j) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

命题 3　假设同引理 1，用以判断无阻塞的条件为

$$P_{1\cdots i}(k+1) \geqslant P_{2\cdots i+1}(k), \quad k = 1,2,\cdots; \; i = 1,\cdots,m-1. \tag{10}$$

证　必要性：由(4)显然有

$$X_i(k+1) \geqslant X_{i+1}(k).$$

复利用引理 1 便可证明必要性.

充分性：用反证法.

接着讨论缓冲器容量一般时的情况. 注意(8)式及命题 2 可导出：

命题 4　有限缓冲串行生产线不发生阻塞的充要条件为：对任意的 k，有

$$[\prod_{j=1}^{k+1}{}_{\odot} P(j)]X(0) \geqslant^{\text{注}} E \sum_{j=1}^{m}{}_{\oplus} E_j [\prod_{l=1}^{k-b_j}{}_{\odot} P(l)]X(0). \tag{11}$$

命题 4 的结论(11)可进一步变为：

推论 3　无阻塞的充要条件是：对$\forall\, k$和所有的 $j(j=1,\cdots,m)$有

注 向量的大小关系定义为其各分量具有一致的大小关系.

$$[\prod_{l=k-b_j+1}^{k+1}{}_{\odot}P(l)]X(k-b_j) \geqslant E_j'X(k-b_j). \tag{12}$$

在 $X(k-b_j)$ 为已知时这种形式的条件应用上更为方便.

命题4中导出的参数化条件在假定加工为批量重复(即 n 种工件视为一批)的情况下,可以得到更好的结果:

命题 5 考虑以 n 种工件为一批的重复加工生产线,且令各机器之前缓冲器容量均为 b,则加工线不产生阻塞的充要条件为:对 $\forall\ k\leqslant k_0+b+nd$,有

$$P(k+1)X(k) \geqslant EX(k-b). \tag{13}$$

其中 k_0 为满足 $\forall\ k\geqslant k_0, \tilde{X}(k+lnd)=\tilde{X}(k)\lambda^l$ 的最小正整数. 这里 $\tilde{X}(k) \triangleq [\prod_{j=1}^{k}{}_{\odot}P(j)]X(0)$.

证 必要性显然.

为证充分性,注意由假设易知

$$X(k)\equiv\tilde{X}(k), \quad \forall\ k\leqslant k_0+b+nd+1.$$

利用批量重复加工假定有 $P(k+lnd)=P(k)$,以及 k_0 的定义,由归纳法可得证.

命题 5 的意义在于给出了批量重复加工中不发生阻塞的参数化条件的有限形式. 对于诸缓冲器容量不相同的情况,用推论 3 易证命题 5 中的界应改为 $k_0+\max\limits_{2\leqslant j\leqslant m}(b_j)+nd$.

最后来说明周期 nd 的存在性. 如前所述,nd 是缓冲器容量为无限时批量重复生产的周期,可通过 $[\prod_{j=1}^{n}{}_{\odot}P(j)]$ 的结构性质来决定[1,3,6].

对刚性加工线批量重复生产,$n+1$ 号工件与 1 号工件参数相同,由命题 3 易知:

命题 6 对刚性批量重复加工,加工过程无阻塞的充要条件为:

$$P_{1\cdots i}(k+1)\geqslant P_{2\cdots i+1}(k), \quad k=1,2,\cdots,n;\ i=1,\cdots,m-1. \tag{14}$$

3 加工参数区间摄动时的主要结果

如果加工参数区间摄动,$P_i(k)\in[P_i^-(k),P_i^+(k)]$,其中 $P_i^-(k)$ 和 $P_i^+(k)$ 分别为加工参数的上下限. 由命题 6 可得:

命题 7 对刚性加工线,若参数区间摄动,且满足

$$P_{1\cdots i}^-(k+1)\geqslant P_{2\cdots i+1}^+(k), \quad k=1,2,\cdots,n;\ i=1,\cdots,m-1, \tag{15}$$

则加工必无阻塞.

其中 $$P_{1\cdots i}^-(k+1)\triangleq\prod_{j=1}^{i}{}_{\odot}P_j^-(k+1), \quad P_{2\cdots i+1}^+(k)\triangleq\prod_{j=2}^{i+1}{}_{\odot}P_j^+(k).$$

4 例　子

现讨论一般缓冲器容量时状态方程的建立及阻塞分析. 设加工参数为

$P_i(k)$	J_1	J_2	J_3
M_1	1.0	0.5	1.0
M_2	4.0	1.0	2.0

再设 $b_2=1$ 和 $X(0)=[X_1(0),X_2(0)]^\tau=[0\ 0]^\tau$,则有

$$P(1)=\begin{bmatrix}1.0 & \varepsilon\\ 5.0 & 4.0\end{bmatrix}, \quad P(2)=\begin{bmatrix}0.5 & \varepsilon\\ 1.5 & 1.0\end{bmatrix}, \quad P(3)=\begin{bmatrix}1.0 & \varepsilon\\ 3.0 & 1.0\end{bmatrix}.$$

于是由命题 2 有

$$X(1) = P(1)X(0) \oplus E[X_1(0-b_1), X_2(-1)]^{\tau} = [1.0 \quad 5.0]^{\tau},$$
$$X(2) = P(2)X(1) \oplus E[X_1(1-b_1), X_2(0)]^{\tau} = [1.5 \quad 6.0]^{\tau},$$
$$X(3) = P(3)X(2) \oplus E[X_1(2-b_1), X_2(1)]^{\tau} = [5.0 \quad 7.0]^{\tau}.$$

注意到 $P(3)P(2)P(1)X(0)=[2.5 \quad 7.0]^{\tau} \ngeq E\sum_{j=1}^{2}{}_{\oplus}E_j[\prod_{l=1}^{k-b_j}{}_{\odot}P(l)]X(0)=[5.0 \quad \varepsilon]^{\tau}$，由命题4知加工过程发生阻塞.

由甘特图易知这是符合实际的.

5 结 论

本文建立了有限缓冲容量的串行生产线的极大代数意义下的线性模型，着重分析了不发生阻塞的参数化条件，并给出了例子. 本文的工作对于把极大代数方法用于阻塞研究是有意义的.

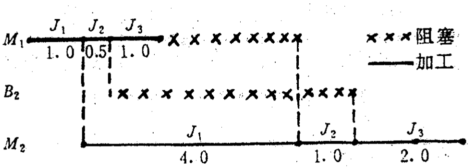

图1 例子的甘特图

参 考 文 献

[1] Cohen, G. et al. A Linear-System-Theoretic View of Discrete Event Processes. Proceedings of 22nd Conf. on Decision and Control, San Antonio, Texas, 1983, 1039—1044

[2] Cohen, G. et al. Linear System Theory for Discrete Event System. Proceedings of 23rd Conf. on Decision and Control, Las Vegas, NV, Dec, 1984, 539—544

[3] Cohen, G. et al. A Linear-System-Theoretic View of Discrete Event Processes and Its Use for Performance Evaluation in Manufacturing. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, AC-30(3):210—220

[4] 涂菶生，乞敬换. 具有存贮器的生产线的状态方程描述及其性能分析. 系统科学与数学，1991，2:177—186

[5] Cuninghame-Green, R. A.. Minimax Algebra-Lecture Notes in Economics and Mathematical System, Spring-Verlag, 1979, 116

[6] Karp, R. M.. A Characterization of the Minimum Cycle Mean in a Digraph. Discrete Math., 1978, 23:309—311

Modeling and Analysis of Blocking Problem for Flow Shops

ZHAO Qianchuan and ZHENG Dazhong

(Departmnet of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: In this paper, the blocking problem of the flow shops with finite buffers is considered. A linear model in the sense of minimax algebra is established. Based on the model, a parametric non-blocking condition is then given.

Key words: flow shop; blocking; minimax algebra

本文作者简介

赵千川 1969年生. 1992年毕业于清华大学自动化系. 现在清华大学自动化系攻读博士学位. 主要从事离散事件动态系统的研究工作.

郑大钟 1935年生. 1959年毕业于清华大学自动控制系. 现为清华大学自动化系教授. 主要研究领域有线性系统理论，最优控制，大系统分散控制，鲁棒控制，离散事件动态系统等.