第 10 卷第 4 期
1993 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 4
Aug., 1993

方块脉冲函数用于连续分布时滞系统的最优控制

王兴涛　邢继祥
(哈尔滨工业大学应用数学系,150006)

摘要：本文应用方块脉冲函数推出了连续分布时滞系统的分段恒定解答,给出了最优控制的综合表达式及泛函目标的最优值.

关键词：方块脉冲函数；分布时滞系统；最优控制

1 引　言

文献[1]把社会经济活动和工程实践中经常出现的系统的控制持续地影响系统状态变化的现象,通过文献[2]中的具体问题,提出了一类应用广泛的连续分布时滞系统.并利用沃尔什变换加以了研究.本文在文献[1,3]的基础上,用方块脉冲函数对连续分布时滞系统的最优控制问题进行讨论,不但可以得到摘要所指出的结论而且还可得出最优状态轨线和最优控制的分段恒定解.

2 方块脉冲函数及有关性质

$t\in[0,T)$上 m 个分量的方块脉冲函数族表达式为

$$\pi_k(t)=\begin{cases}1, & (k-1)\dfrac{T}{m}\leqslant t<k\dfrac{T}{m},\\ 0, & \text{其它}, k=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{1}$$

设 $C_i(t), i=1,2,\cdots,n$ 为$[0,T)$上平方可积函数,$C(t)=[C_1(t),C_2(t),\cdots,C_n(t)]^{\mathrm T}$ 的方块脉冲函数的近似展开式为

$$C(t)=\sum_{k=1}^{m}C_k\pi_k(t)=\overline{C}\pi(t). \tag{2}$$

其中

$$C_k=\frac{m}{T}\int_{(k-1)\frac{T}{m}}^{k\frac{T}{m}}C(t)\mathrm{d}t,\quad k=1,2,\cdots,m, \tag{3}$$

$$\overline{C}=[C_1,C_2,\cdots,C_m],\quad \pi(t)=[\pi_1(t),\pi_2(t),\cdots,\pi_m(t)]^{\mathrm T}. \tag{4}$$

性质　方块脉冲函数的积分运算矩阵

$$E=\frac{T}{2m}(I_1+\Delta)(I_1-\Delta)^{-1} \tag{5}$$

满足[4]

$$\int_0^t\pi(\tau)\mathrm{d}\tau\doteq E\pi(t). \tag{6}$$

其中 I_1 为 m 阶单位矩阵

本文于1991年11月27日收到.1992年7月17日收到修改稿.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{7}$$

注　下文中出现与前文含义类似的符号，不再赘述.

3　连续分布时滞状态方程的近似解

考虑文献[1]中的连续分布时滞系统，由如下积分微分方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\int_0^t f(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{8}$$

式中 $f(t)$ 是 $[0,T]$ 上的有界平方可积函数，$f(t-\tau)$ 表示 τ 时刻的输入在 t 时刻发生作用的比率. 其它符号具有通常的意义.

把 $x(t)$ 和 $u(t)$ 分别按方块脉冲函数展开，有

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=1}^{m} x_k\pi_k(t) = \overline{X}\pi(t), \\ u(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k\pi_k(t) = \overline{U}\pi(t), \end{cases} \tag{9}$$

并且可以证明 $F(t) = \int_0^t f(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的方块脉冲函数展开式为

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} F_i\pi_i(t) = \overline{F}\pi(t). \tag{10}$$

其中

$$F_i = \sum_{k=1}^{i-1} f_{ik}u_k + \frac{1}{2}f_{ii}u_i, \quad i = 1,2,\cdots,m, \tag{11}$$

$$f_{ik} = \frac{m}{T}\int_{(i-1)\frac{T}{m}}^{i\frac{T}{m}}\left[\int_{(k-1)\frac{T}{m}}^{k\frac{T}{m}} f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t, \quad k = 1,2,\cdots,i-1,\ i = 2,\cdots,m, \tag{12}$$

$$f_{ii} = \frac{m}{T}\int_{(i-1)\frac{T}{m}}^{i\frac{T}{m}}\left[\int_{(i-1)\frac{T}{m}}^{t} f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t, \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{13}$$

对(8)式从 0 到 t 积分，把(9)，(10)式代入，再利用(5)，(6)式，有

$$\overline{X}(I_1 - \Delta) - [x_0, \underbrace{0,\cdots,0}_{m-1}] = \frac{T}{2m}A\overline{X}(I_1 + \Delta) + \frac{T}{2m}B\overline{F}(I_1 + \Delta). \tag{14}$$

利用 Kronecker 乘积符号，得

$$[(I_1 - \Delta^{\mathrm{T}}) \otimes I_2 - \frac{T}{2m}(I_1 + \Delta^{\mathrm{T}}) \otimes A]X = \frac{T}{2m}[(I_1 + \Delta^{\mathrm{T}}) \otimes B]F + X_0. \tag{15}$$

其中

$$X = [x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, \cdots, x_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

$$X_0 = [x_0^{\mathrm{T}}, \underbrace{0^{\mathrm{T}},\cdots,0^{\mathrm{T}}}_{m-1}]^{\mathrm{T}}, \tag{17}$$

$$F = (\bar{f} \otimes I_3)U, \tag{18}$$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f_{11} & & & 0 \\ f_{21} & \frac{1}{2}f_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & \frac{1}{2}f_{mm} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$U = [u_1^{\mathrm{T}}, u_2^{\mathrm{T}}, \cdots, u_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \tag{20}$$

I_2 和 I_3 是单位矩阵，阶数分别与 $x(t)$ 的维数和 $u(t)$ 的行数相同.

因为

$$[(I_1 + \Delta^{\mathrm{T}}) \otimes B](\bar{f} \otimes I_3) = [(I_1 + \Delta^{\mathrm{T}})\bar{f}] \otimes B, \tag{21}$$

所以把(15)式写成

$$X = LU + M. \tag{22}$$

其中

$$L = N^{-1}F_0, \quad M = N^{-1}X_0, \tag{23}$$

$$N = (I_1 - \Delta^{\mathrm{T}}) \otimes I_2 - \frac{T}{2m}(I_1 + \Delta^{\mathrm{T}}) \otimes A, \tag{24}$$

$$F_0 = \frac{T}{2m}(\bar{f} + \Delta^{\mathrm{T}}\bar{f}) \otimes B. \tag{25}$$

(22)式为连续分布时滞状态方程(8)的分段恒定解.

4 最优控制综合的解法

问题是求在系统(8)下使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \tag{26}$$

达到最小.

利用[5]，有

$$J_m = \frac{T}{2m}(X^{\mathrm{T}}\tilde{Q}X + U^{\mathrm{T}}\tilde{R}U). \tag{27}$$

其中

$$\tilde{Q} = \text{block-diag}(\underbrace{Q, \cdots, Q}_{m}), \quad \tilde{R} = \text{block-diag}(\underbrace{R, \cdots, R}_{m}), \tag{28}$$

那么该问题转化为在条件(22)下使(27)达到最小.

设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{mn})^{\mathrm{T}}$，考虑

$$J_\lambda = \frac{T}{2m}(X^{\mathrm{T}}\tilde{Q}X + U^{\mathrm{T}}\tilde{R}U) + \lambda^{\mathrm{T}}(X - LU - M) \tag{29}$$

满足

$$\frac{\partial J_\lambda}{\partial X} = \frac{T}{m}\tilde{Q}X + \lambda = 0, \quad \frac{\partial J_\lambda}{\partial U} = \frac{T}{m}\tilde{R}U - L^{\mathrm{T}}\lambda = 0, \tag{30}$$

于是由(30)式可得该问题的最优控制综合表达式

$$U = -\tilde{R}^{-1}L^{\mathrm{T}}\tilde{Q}X. \tag{31}$$

由(22)与(31)式可得最优状态轨线的分段恒定解

$$X = [I + L\tilde{R}^{-1}L^{\mathrm{T}}\tilde{Q}]^{-1}M \tag{32}$$

及最优控制的分析恒定解

$$U = -\tilde{R}^{-1}L^{\mathrm{T}}\tilde{Q}[I + L\tilde{R}^{-1}L^{\mathrm{T}}\tilde{Q}]^{-1}M. \tag{33}$$

其中 I 为 $m\times n$ 阶单矩阵. 利用(32), (33)和(27)可得目标泛函最优值.

5 数值算例

考虑连续分布时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + \int_0^t (t-\tau)^{1/2} u(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

求使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + 2u^2(t)]\mathrm{d}t$$

达到最小的最优控制综合表达式,状态最优轨线. 最优控制的分段恒定解和目标最优值.

解: $A=1$, $B=1$, $f(t-\tau)=(t-\tau)^{1/2}$, $Q=1$, $R=2$, $T=1$.

取 $m=4$ 由(31)~(33)及(27)式得

$$U = -\begin{bmatrix} 0.00238 & 0.01415 & 0.03946 & 0.07872 \\ 0 & 0.00238 & 0.01415 & 0.03946 \\ 0 & 0 & 0.00238 & 0.01415 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00238 \end{bmatrix} X,$$

$$X = [1.14150,\ 1.46561,\ 1.86312,\ 2.37640]^{\mathrm{T}},$$

$$U = -[0.28403,\ 0.12362,\ 0.03806,\ 0.00566]^{\mathrm{T}},$$

$$J = 1.59555.$$

参 考 文 献

[1] 王浣尘,张春曙. 连续分布时滞系统优化问题的沃尔什变换算法. 信息与控制,1990,19(5):10—17

[2] Choi, S. B. and Hwang, H.. Optimization of Production Planning Problems with Continuously Distributed Time-Lags. Int. J. Systems, Sci, 1986, 17:1499—1506

[3] 邢继祥,王兴涛. 方块脉冲函数用于非线性系统的分析以及最优控制的综合. 自动化学报,1985,11:175—183

[4] Sannuti, P.. Analysis and Synthesis of Dynamic Systems via Block-Pulse Functions. Proc. Instn. elect. Engrs, 1977, 124:569—571

[5] 邢继祥,王兴涛. 方块脉冲函数用于延时 LQP 最优控制的综合与分析. 宇航学报, 1990, (1):63—69

Optimal Control of Continuously Distributed Time-Lags Systems via Bolck-Pulse Functions

WANG Xingtao and XING Jixiang

(Department of Applied Mathematics, Harbin Institute of Technology • Harbin, 110006, PRC)

Abstract: In this paper, by using block-pulse functions, the piecewise constant solutions of continuously distributed time-lags systems are derived, and the synthesis formula of optimal control and the optimal value of objective functional are given.

Key words: block-pulse functions; distributed time-lags systems; optimal control

本文作者简介

王兴涛 1960年生. 1983年毕业于哈尔滨工业大学,分配在某飞机制造厂工作. 1988年研究生毕业,现为哈尔滨工业大学应用数学系讲师. 主要从事最优控制及应用方面的研究.

邢继祥 1939年生. 1963年毕业于哈尔滨工业大学,后留校,现为数学系教授. 主要从事最优控制理论与应用方面的研究.

国际会议消息

(转载 IFAC NEWSLETTER 1993, No. 3)

Title	1994	Place	Deadlines	Further Information
IFAC Workshop Computing in Economics and Finance	June 8—10	Amsterdam Netherlands	31 Jan. 1994	Mr. Hans M. Amman Dept. of Macroeconomics, Rm E1-911 Univ. of Amsterdam, Roeterstraat 11 NL-1018 WB Amsterdam, Netherlands FAX+31/20/525528, e-mail:amman @ sara. nl
IFAC/IFIP/IFORS Workshop (2nd) Intelligent Manufacturing system	June 22—24	Vienna Austria	15 Feb. 1994	Dr. Martin Zauner, ÖPWZ, Rockhgasse 6 A-1014 Vienna, Austria FAX+43/1/533 863621
IFAC Workshop Computer Software Structures Integrating AI/KBS	Aug. 10—12	Lund Sweden	15 Jan 1994	Svenska IFAC kommitten POB 27, S-75103 Uppsala, Sweden FAX+46/18/503611
IFAC/ISHS Workshop(2nd) Mathematical and Control Applications in Agriculture and Horticulture	Sept. 12—16	Silsoe UK	1 July 1994	Dr. W. Day, Silsoe Research Inst. Wrest Park, Silsoe, MK45 4HS, UK
IFAC Symposuim (13TH) Atuomatic Control in Aerospace	Sept. 12—16	Palo Alto CA, USA	1 Feb. 1994	Dr. K. Lorell, Lockheed 92-30/250 3251 Hanover Str., Palo Alto, CA 94304-2746 USA, FAX:415/424-3106
IFAC Symposium Robot Control-SYROCO	Sept. 19—21	Capri Italy	15 Dec. 1993	Prof. S. Nicosia, SYROCO 94 Sci. Secr. DIE, Universià degli Studi di Roma Tor Vergata, "Via della Ricerca Scientifica" I-00133 Rome, Italy, FAX+39/6/2020519 e-mail:nicosia @ tovvx1. ccd. utovrm. it
IFAC Conference Integrated Systems Engineering	Sept. 27—29	Baden-Baden Germany	14 Jan. 1994	Mr. H. Wiefels, VDI/VDE GMA POB 10 11 39 D-40002 Düsseldorf, Germany FAX+49/211/6214161
IFAC Workshop Distributed Computer Control Systems-DCCS 94	Sept. 28—30	Madrid Spain	1 March 1994	Prof. Juan de la Puente ETSI Telecommunicacion Universidad Politecnica de Madrid E-28040 Madrid, Spain, FAX+34/1/543 2077 e-mail:jpuente @ gic. tat. upm. es