第10卷第4期
1993年8月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 10, No. 4
Aug., 1993

零点位于左扇区的多项式菱形族

郭　磊
(青岛大学应用数学系·青岛,266071)
赵克友
(青岛大学电气工程系·青岛,266071)

摘要：本文考虑多项式菱形族 $\mathscr{P}$ 的左扇区稳定性. 证明了多项式族 $\mathscr{P}$ 左扇区稳定的充分必要条件是 $\mathscr{P}$ 的至多 $4q(q-1)$ 条特殊棱边左扇区稳定；进一步，在一定条件下，只要检验 $\mathscr{P}$ 的 $4q$ 个顶点多项式就可确定 $\mathscr{P}$ 的左扇区稳定性.

关键词：多项式；稳定性；鲁棒性

1 引　言

设 $\mathscr{P}$ 为任意的摄动多项式族，D 为复平面 C 的某稳定性区域. 若 $\{s\in \mathrm{C}\,|\,p(s)=0, p(\cdot)\in\mathscr{P}\}\subset D$，则称 $\mathscr{P}$ 是 D 稳定的. 关于多项式族 $\mathscr{P}$ 的稳定性的有限检验问题，已发表了不少有价值的结果，最新进展见文[1]. 本文考虑多项式菱形族 $\mathscr{P}$ 的左扇区稳定性，它是文[2,3]问题的推广，同时又可看成文[4]问题的对偶. 由于左扇区稳定性反映系统瞬态的阻尼比特性，因而本文考虑的问题有一定的工程意义.

2 符号及预备知识

给定 n 阶多项式 $a(s)=a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n, a_i>0, i=0,1,2,\cdots,n$，定义它的菱形摄动族为

$$\mathscr{P}=\{(a_0+b_0)+(a_1+b_1)s+\cdots+(a_n+b_n)s^n\,|\,\sum_{i=0}^{n}|b_i|\leqslant r\}$$

$$=\{a(s)+b_0+b_1s+\cdots+b_ns^n\,|\,\sum_{i=0}^{n}|b_i|\leqslant r\}.$$

其中 r 表示菱形的“尺寸”，$a(s)=\sum_{i=0}^{n}a_is^i$，且要求 $a_i>r>0$，a_i, b_i 均为实数，$i=0,1,\cdots,n$. 于是，$\mathscr{P}$ 中的元素有不变阶次 n 与恒正系数.

稳定性区域为如下定义的左扇区：

$$D_\varphi=\{s\in \mathrm{C}\,|\,\varphi<\arg(s)<2\pi-\varphi\}.$$

其中 $\varphi=\frac{p}{q}\pi$，p 与 q 为互质正整数，且 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{p}{q}<1$.

若 $\{s\in \mathrm{C}\,|\,p(s)=0,\ p(\cdot)\in\mathscr{P}\}\subset D_\varphi$，称 $\mathscr{P}$ 为左扇区稳定或 D_φ 稳定. 为方便，以 $\mathscr{H}_\varphi$ 表示 D_φ 稳定的多项式的全体.

当 $q\leqslant n$ 时，定义 $\mathscr{P}$ 中的两个重要子集如下：

$$\mathscr{P}_1:=\{a(s)+b_0+b_1s+\cdots+b_{q-1}s^{q-1}\,|\,\sum_{i=0}^{q-1}|b_i|\leqslant r\},$$

本文于1992年3月7日收到. 1992年9月2日收到修改稿.

$$\mathscr{P}_2:=\{a(s)+b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_{n-q+1}s^{n-q+1}\mid \sum_{i=n-q+1}^{n}|b_i|\leqslant r\}.$$

当 $q>n$ 时，只要令 $\mathscr{P}_1=\mathscr{P}_2=\mathscr{P}$，其它论证类似.

$\mathscr{P}_1$ 与 $\mathscr{P}_2$ 的顶点集分别为

$$\mathscr{W}_{\mathscr{P}_1}:=\{a(s)+b_i s^i \mid b_i\in\{-r,r\},i=0,1,\cdots,q-1\},$$

$$\mathscr{W}_{\mathscr{P}_2}:=\{a(s)+b_k s^k \mid b_k\in\{-r,r\},k=n-q+1,n-q+2,\cdots,n\}.$$

容易算出，$\mathscr{W}_{\mathscr{P}_1}\cup\mathscr{W}_{\mathscr{P}_2}$中所含顶点多项式的总数当 $q\leqslant\frac{n}{2}$时为 $4q$ 个，当 $q>\frac{n}{2}$时为 $2(n+1)$个.

对于任意两个多项式 $p_1(s)$与 $p_2(s)$，由它们作为“顶点”而形成的“棱边”，系指它们的凸组合，其表达式为

$$(1-\lambda)p_1(s)+\lambda p_2(s)=p_1(s)+\lambda(p_2(s)-p_1(s)),\quad \forall\lambda\in[0,1]. \tag{1}$$

由此，由 $\mathscr{W}_{\mathscr{P}_1}$中任意两个多项式所形成的棱边为(只考虑“暴露”棱边)

$$a(s)+b_i s^i+\lambda s^i(b_k s^{k-i}-b_i),\quad \forall\lambda\in[0,1]. \tag{2}$$

其中 $b_i,b_k\in\{-r,r\}$且 $0\leqslant i<k\leqslant q-1$. (2)式表示的所有棱边多项式的全体记为 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$，称 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$为 $\mathscr{P}_1$ 的棱边集. 容易看出 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$是下面四个子集的并集：

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}^{++}:=\{a(s)+rs^i+\lambda rs^i(s^{k-i}-1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid 0\leqslant i<k\leqslant q-1\},$$

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}^{--}:=\{a(s)-rs^i-\lambda rs^i(s^{k-i}-1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid 0\leqslant i<k\leqslant q-1\},$$

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}^{+-}:=\{a(s)+rs^i-\lambda rs^i(s^{k-i}+1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid 0\leqslant i<k\leqslant q-1\},$$

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}^{-+}:=\{a(s)-rs^i+\lambda rs^i(s^{k-i}+1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid 0\leqslant i<k\leqslant q-1\}.$$

同样地可定义 $\mathscr{P}_2$ 的棱边集 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$，它是下面四个子集的并集

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}^{++}:=\{a(s)+rs^i+\lambda rs^i(s^{k-i}-1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid n-q+1\leqslant i<k\leqslant n\},$$

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}^{--}:=\{a(s)-rs^i-\lambda rs^i(s^{k-i}-1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid n-q+1\leqslant i<k\leqslant n\},$$

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}^{+-}:=\{a(s)+rs^i-\lambda rs^i(s^{k-i}+1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid n-q+1\leqslant i<k\leqslant n\},$$

$$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}^{-+}:=\{a(s)-rs^i+\lambda rs^i(s^{k-i}+1),\quad \forall\lambda\in[0,1]\mid n-q+1\leqslant i<k\leqslant n\}.$$

称 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}\cup\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$为多项式族 $\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$ 的棱边集. 计算表明，$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}\cup\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$所含棱边总数，在 $q\leqslant\frac{n}{2}$时为 $4q(q-1)$条，在 $q>\frac{n}{2}$时为 $2n(n+1)$条. 其中 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$与 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$各含相同数目的棱边数，并且 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$与 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$中的每一按上文定义的子集也都各含相同数目的棱边数.

根据对多项式族值集(value set)的定义，考虑到区域 D_φ 的对称性，只需考察 D_φ 的上边界：$s=xe^{j\varphi},x\in[0,+\infty)$. 分别用 $V_{\mathscr{P}}(x),V_{\mathscr{P}_1}(x),V_{\mathscr{P}_2}(x),V_{\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2}(x)$，表示 $\mathscr{P},\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2,\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$ 的值集，其中下标符号系指所考虑的多项式族，例如：$V_{\mathscr{P}}(x):=\{p(xe^{j\varphi})\mid p(\cdot)\in\mathscr{P},x\in[0,+\infty)\}$.

3　主要结果

3.1　推广的菱形定理

将文[2]的结果，推广至左扇区稳定性，我们有

定理 1　$\mathscr{P}\subset\mathscr{H}_\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$与 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{H}_\varphi$.

证　由于 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}\subset\mathscr{P}$，$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{P}$，因而必要性显然. 下证充分性.

根据文[5]及文[6]中对值集运算所定义的法则，并利用文[7]对多项式分组的技巧，可推得

$$V_{\mathscr{P}}(x)=V_{\mathscr{P}_1}(x),\quad \forall\, x\in[0,1], \tag{3}$$

$$V_{\mathscr{P}}(x)=V_{\mathscr{P}_2}(x),\quad \forall\, x\in[1,+\infty]. \tag{4}$$

进一步可得

$$V_{\mathscr{P}_1}(x)\supset V_{\mathscr{P}_2}(x),\quad \forall\, x\in[0,1], \tag{5}$$

$$V_{\mathscr{P}_1}(x)\subset V_{\mathscr{P}_2}(x),\quad \forall\, x\in[1,+\infty]. \tag{6}$$

由(5)，(6)，显然有

$$\forall\, x\in[0,1],\quad V_{\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2}(x)=V_{\mathscr{P}_1}(x)\cup V_{\mathscr{P}_2}(x)=V_{\mathscr{P}_1}(x),$$

$$\forall\, x\in[1,+\infty).\quad V_{\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2}(x)=V_{\mathscr{P}_1}(x)\cup V_{\mathscr{P}_2}(x)=V_{\mathscr{P}_2}(x).$$

再注意到(1)及(2)，即得

$$V_{\mathscr{P}}(x)=V_{\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2}(x),\quad \forall\, x\in[0,+\infty]. \tag{7}$$

(7)式说明 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$ 是 D_φ 边界等价的[5]，因而它们有相同的 D_φ 稳定性，换言之，$\mathscr{P}\subset\mathscr{H}_\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{P}_1,\mathscr{P}_2\subset\mathscr{H}_\varphi$. 对 $\mathscr{P}_1$ 与 $\mathscr{P}_2$ 运用著名的棱边定理便证得充分性.　证毕.

附注　1) 定理1说明：只需检验 $\mathscr{P}_1$ 与 $\mathscr{P}_2$ 的棱边集的 D_φ 稳定性，就足以保证整族 $\mathscr{P}$ 的 D_φ 稳定性.

2) 当在 $q\leqslant\frac{n}{2}$ 时，需要检验 D_φ 稳定性的棱边的数目为 $4q(q-1)$，与多项式次数 n 无关，当 $q>\frac{n}{2}$ 时，需要检验的棱边数目为 $2n(n+1)$.

3) 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，定理1的特款即文[2]的结果.

3.2 简化的菱形定理

若棱边(1)满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg\left[\frac{p_2(s)-p_1(s)}{p_1(s)}\right]\Bigg|_{s=xe^{j\varphi}}<0,\quad \forall\, x\in[0,+\infty), \tag{8}$$

则称此棱边满足“相对幅角下降”条件.

关于顶点稳定性与棱边稳定性的关系，有下列结果.

引理[8]　若棱边(1)有恒定的阶次与恒正的首项系数，且满足相对幅角下降条件，则棱边族(1)是 D_φ 稳定的当且仅当其顶点多项式 $p_1(s)$ 与 $p_2(s)$ 是 D_φ 稳定的.

棱边集 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$，$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$ 中，下列棱边满足引理的前提条件：

i) $\mathscr{E}^{+}_{\mathscr{F}_1}$ 与 $\mathscr{E}^{-}_{\mathscr{P}_1}$ 中使 $(k-i)\varphi$ 在坐标平面Ⅰ，Ⅱ象限的；

ii) $\mathscr{E}^{-}_{\mathscr{F}_1}$ 与 $\mathscr{E}^{+}_{\mathscr{P}_1}$ 中使 $(k-i)\varphi$ 在坐标平面Ⅲ，Ⅳ象限的；

iii) $\mathscr{E}^{+}_{\mathscr{F}_2}$ 与 $\mathscr{E}^{-}_{\mathscr{P}_2}$ 中使 $(k-i)\varphi$ 在坐标平面Ⅰ，Ⅱ象限的；

iv) $\mathscr{E}^{-}_{\mathscr{F}_2}$ 与 $\mathscr{E}^{+}_{\mathscr{P}_2}$ 中使 $(k-i)\varphi$ 在坐标平面Ⅲ，Ⅳ象限的.

不失一般性，我们仅就情形 i)，ii)给予说明.

$$\arg\left[\frac{p_2(s)-p_2(s)}{p_1(s)}\right]\Bigg|_{s=xe^{j\varphi}} = \arg\left[\frac{\lambda s^i(b_k s^{k-i}-b_i)}{a(s)+b_i s^i}\right]\Bigg|_{s=xe^{j\varphi}}$$
$$= i\varphi + \arg[b_k s^{k-i}-b_i]|_{s=xe^{j\varphi}} - \arg[a(s)+b_i s^i]|_{s=xe^{j\varphi}}, \tag{9}$$

上式右端第一项为常值;因 $a(s)+b_is^i\in\mathscr{H}_\varphi$,故第三项中的 $\arg[a(s)+b_is^i]|_{s=xe^{j\varphi}}$ 随 $x\in[0,+\infty)$ 的增大而严格上升. 对于第二项,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arg[b_k s^{k-i}-b_i]|_{s=xe^{j\varphi}} = \frac{-b_ib_k(k-i)x^{k-i-1}\sin(k-i)\varphi}{[b_kx^{k-i}\cos(k-i)\varphi-b_i]^2+[b_kx^{k-i}\sin(k-i)\varphi]^2}. \tag{10}$$

显然,若 $b_i=b_k\in\{-r,r\}$ 且 $(k-i)\varphi$ 位于第Ⅰ,Ⅱ象限,或 $b_i=-b_k\in\{-r,r\}$ 且 $(k-i)\varphi$ 位于第Ⅲ,Ⅳ象限,则对 $\forall\ x\in(0,+\infty)$,上式恒小于零. 因此 i),ii)中的棱边满足引理的条件.

为了方便,$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$ 中符合上面条件 i)或 ii)的棱边全体,记以 $\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_1}$;$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$ 中符合上面条件 iii)或 iv)的棱边全体,记以 $\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_2}$. 下面给出"简化的菱形定理".

定理 2 $\mathscr{P}\subset\mathscr{H}_\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}\backslash\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_1}$ 及 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}\backslash\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{H}_\varphi$.

证 必要性显然. 下证充分性.

由 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}\backslash\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_1}\subset\mathscr{H}_\varphi$ 及 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}\backslash\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{H}_\varphi$,可知 $\mathscr{W}_{\mathscr{P}_1}\subset\mathscr{H}_\varphi$ 及 $\mathscr{W}_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{H}_\varphi$,又因 $\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_1}$ 与 $\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_2}$ 中的棱边皆满足相对幅角下降条件,因而 $\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_1}\subset\mathscr{H}_\varphi$ 及 $\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{H}_\varphi$,于是 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}\subset\mathscr{H}_\varphi$,$\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{H}_\varphi$,运用定理 1 即可完成证明. 证毕.

附注 1) 定理 2 说明:只需检验 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$ 与 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$ 中的部分棱边的 $\mathscr{D}_\varphi$ 稳定性,便可确定 $\mathscr{P}$ 的 D_φ 稳定性.

2) 一般情形下,$\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_1}$ 的棱边个数为 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}$ 的一半;$\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_2}$ 的棱边个数为 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}$ 的一半. 如 $\varphi=\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi,\frac{3}{4}\pi,\cdots$ 的情形.

3) 当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时,定理 2 的特款即文[3]的结果.

3.3 强菱形定理

定理 3 若 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_1}\backslash\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_1}$ 与 $\mathscr{E}_{\mathscr{P}_2}\backslash\mathscr{E}^*_{\mathscr{P}_2}$ 中的所有棱边都满足相对幅角下降条件,则 $\mathscr{P}\subset\mathscr{H}_\varphi$ 当且仅当 $\mathscr{W}_{\mathscr{P}_1}$ 与 $\mathscr{W}_{\mathscr{P}_2}\subset\mathscr{H}_\varphi$.

证 综合定理 1,2 与引理即得. 证毕.

附注 1) 定理 3 说明,在一定条件下,只需检验 $\mathscr{P}_1$ 和 $\mathscr{P}_2$ 的顶点多项式集的 D_φ 稳定性,就可确定 $\mathscr{P}$ 的 D_φ 稳定性.

2) 定理 3 的前提条件不一定是必要的,如 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 的情形.

4 结 语

本文给出关于多项式菱形族左扇区稳定的"推广的菱形定理"、"简化的菱形定理"及"强菱形定理",若干最近文献的有关结果成为本文结论的特例. 进一步可考虑的问题有: 1) 复多项式菱形族的左扇区稳定性; 2) 计算一个给定的 D_φ 稳定多项式的最大摄动菱形尺寸 $r_{\max}$,同时保证摄动后的菱形族是 D_φ 稳定的.

参 考 文 献

[1] 黄琳,王龙,于年才. 系统鲁棒性的若干问题——背景、现状与挑战. 控制理论与应用,1991, 8(1):11—29

[2] Tempo, R.. A Dual Result to Kharitonov's Theorem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(2):195—198

[3] Foo, Y. K. and Soh, Y. C.. Stability of a Family of Polynomials with Coefficients Bounded in a Diamond. IEEE. Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(12):1501—1502

[4] Soh, Y. C. and Foo, Y. K.. Generalization of Strong Kharitonov Theorems to the Left Sector. IEEE. Trans., Automat. Contr., 1990, AC-35(12):1378—1382

[5] 黄琳,王龙. 鲁棒稳定性分析的值映射与参数化方法. 中国科学(A 辑),1991, 6(8):839—847

[6] Barmish, B. R. et al.. The Tree Structured Decomposition: A New Approach to Robust Stability Analysis. Proc. of the Conf. on Inform., Sci. & Sys., 1990

[7] 赵克友. 区间多项式族左扇区的稳定性及不变惯性定理. 1991 年全国控制理论与应用年会论文集(上),威海,128—131

[8] Fu, M.. A Class of Weak Kharitonov Regions for Robust Stability of Linear Uncertain Systems. IEEE. Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(8):975—978

Diamond Families of Polynomials with Zeroes in the Left Sector

GUO Lei

(Department of Applied Mathematics, Qingdao University, Qingdao, 266071, PRC)

ZHAO Keyou

(Department of Electrical Engineering, Qingdao University, Qingdao, 266071, PRC)

Abstract: The paper considers D_φ stability of $\mathscr{D}$ where D_φ is a left sector in the complex plane and $\mathscr{D}$ a diamond of perturbed polynomials. The paper shows that in order to check D_φ-stability of $\mathscr{D}$, it suffices to check the $4q(q-1)$ specific edges of $\mathscr{D}$. Furthermore, under the mild conditions, it suffices to check the $4q$ specific vertices of $\mathscr{D}$.

Key words: polynomials; stability; robustness

本文作者简介

郭　磊　1966 年生. 分别于 1988 年,1991 年在曲阜师范大学获学士、硕士学位,现在青岛大学任教. 研究兴趣主要在于鲁棒控制理论与稳定性理论.

赵克友　见本刊 1993 年第 1 期第 112 页.