

多通道非平稳 ARMA 信号自校正去卷滤波器*

邓自立

张焕水

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨, 150080) (泰安师专数学系·山东, 271000)

摘要: 对于通过一个已知的线性系统被观测的多通道非平稳 ARMA 信号, 本文用现代时间序列分析方法^[1], 基于 ARMA 新息模型, 提出了自校正去卷滤波新方法. 仿真例子说明了其有效性.

关键词: 多通道非平稳 ARMA 信号; 去卷滤波器; 输入估计; 自校正; 现代时间序列分析方法

1 引言

去卷(Deconvolution), 也叫反褶积或输入估计, 广泛应用于通讯、信号和数据处理、反射地震学等领域^[2~7]. 七十年代后期, 美国 Mendel^[2,3]以油田勘探地震信号处理为应用背景, 用 Kalman 滤波方法提出了最优白噪声去卷估值器. Ahlen 和 Sternad^[4]用谱分解方法提出了单通道 ARMA 信号最优去卷平滑器. 文[5, 6, 7]用现代时间序列分析方法提出了单通道白噪声或 ARMA 信号的最优或自校正去卷估值器. 本文将提出多通道 ARMA 信号的自校正去卷滤波新方法. 其特点是基于 ARMA 新息模型, 通过计算输出预报器和观测白噪声滤波器便得到 ARMA 信号的去卷滤波器.

2 稳态最优去卷滤波器

考虑多通道非平稳 ARMA 信号 $s(t)$

$$A(q^{-1})s(t) = C(q^{-1})e(t), \quad (1)$$

它通过如下已知的线性系统被观测

$$P(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})s(t) + R(q^{-1})v(t). \quad (2)$$

其中 $s(t)$ 和 $y(t)$ 是 $m \times 1$ 维输入信号和输出(观测)信号, $e(t)$ 和 $v(t)$ 分别是零均值、方差阵为 Q_e 和 Q_v 的独立的白噪声. q^{-1} 是单位滞后算子, $q^{-1}s(t) = s(t-1)$, $A(q^{-1}), C(q^{-1}), \dots$ 为如下形式的多项式矩阵

$$X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_{n_x}q^{-n_x}. \quad (3)$$

其中 X_i 为 $m \times m$ 系数阵, $A_0 = P_0 = R_0 = I_m$ ($m \times m$ 单位阵), $C_0 = B_0 = 0$ (零阵), $n_a = n_e = n_1, n_r = n_b = n_v = n_2$. 假设 $s(t)$ 是非平稳的, 即 $A(q^{-1})$ 是不稳定的, 就是说 $\det A(x)$ 的零点不全位于单位圆外.

假定 $P(q^{-1}), B(q^{-1}), R(q^{-1}), Q_v$ 是已知的. 当 $A(q^{-1}), C(q^{-1}), Q_e$ 已知时, 最优去卷滤波问题是: 基于观测数据 $\{y(t), y(t-1), \dots, y(0)\}$ 求 $s(t)$ 的稳态最优(线性最小方差)滤波

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于 1992 年 1 月 16 日收到, 1992 年 7 月 21 日收到修改稿.

器 $\hat{s}(t/t)$. 当 $A(q^{-1}), C(q^{-1}), Q_e$ 未知时, 自校正去卷滤波问题是求 $s(t)$ 的渐近最优滤波器 $\hat{s}(t/t)$.

2.1 ARMA 新息模型

由伴随矩阵定义^[8], $\text{adj}B(q^{-1})$ 可表为

$$\text{adj}B(q^{-1}) = q^{-(m-1)}[L_0 + L_1q^{-1} + \cdots + L_{n_2}q^{-n_2}] \triangleq q^{-(m-1)}L(q^{-1}). \quad (4)$$

其中 $n_3 = n_2(m-1) - (m-1)$, 且假设 $m \times m$ 阵 L_0 是非异的. (2)式左乘以 $\text{adj}B(q^{-1})$ 有

$$\text{adj}B(q^{-1})P(q^{-1})y(t) = \det B(q^{-1})s(t) + \text{adj}B(q^{-1})R(q^{-1})v(t). \quad (5)$$

(5)式左乘以 $A(q^{-1})$ 并应用(1)式有

$$A(q^{-1})\text{adj}B(q^{-1})P(q^{-1})y(t) = \det B(q^{-1})C(q^{-1})e(t) + A(q^{-1})\text{adj}B(q^{-1})R(q^{-1})v(t). \quad (6)$$

(6)式两边左乘以 $q^{(m-1)}L_0^{-1}$ 引出

$$\begin{aligned} L_0^{-1}A(q^{-1})L(q^{-1})P(q^{-1})y(t) &= L_0^{-1}L(q^{-1})B(q^{-1})C(q^{-1})e(t) \\ &\quad + L_0^{-1}A(q^{-1})L(q^{-1})R(q^{-1})v(t). \end{aligned} \quad (7)$$

注意, (7)式右边的两个滑动平均(MA)过程可用一个等价的 MA 过程唯一表示为^[9]

$$D(q^{-1})e(t) = L_0^{-1}L(q^{-1})B(q^{-1})C(q^{-1})e(t) + L_0^{-1}A(q^{-1})L(q^{-1})R(q^{-1})v(t). \quad (8)$$

其中 $D(q^{-1})$ 是稳定的, $D(q^{-1}) = I_m + D_1q^{-1} + \cdots + D_{n_d}q^{-n_d}$, 且 $n_d = n_1 + n_2m - (m-1)$, 而 $e(t)$ 是零均值、方差阵为 Q_e 的白噪声, 可证明 $e(t)$ 是 $y(t)$ 的新息过程^[1], 因而称由(7)和(8)式引出的 ARMA 模型

$$L_0^{-1}A(q^{-1})L(q^{-1})P(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})e(t) \quad (9)$$

为 ARMA 新息模型.

2.2 稳态最优去卷滤波器 $\hat{s}(t/t)$

ARMA 模型(1)式可表为状态空间模型^[1]

$$\begin{cases} \eta(t+1) = A\eta(t) + Ce(t), \\ s(t) = H_1\eta(t). \end{cases} \quad (10)$$

$$(11)$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} -A_1 & & \\ \vdots & I_{(n_2-1)m} & \\ -A_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{n_2} \end{bmatrix}, \quad H_1 = [I_m, 0, \cdots, 0]. \quad (12)$$

观测方程(2)式有状态空间模型^[1]

$$\begin{cases} z(t+1) = Pz(t) + Bs(t) + Rv(t), \\ y(t) = H_2z(t) + v(t). \end{cases} \quad (13)$$

$$(14)$$

其中 $H_2 = [I_m, 0, \cdots, 0]$, 且

$$P = \begin{bmatrix} -P_1 & & \\ \vdots & I_{(n_2-1)m} & \\ -P_{n_2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{n_2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 - P_1 \\ \vdots \\ R_{n_2} - P_{n_2} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

引入增广状态系统

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + \Gamma w(t), \\ y(t) = Hx(t) + v(t). \end{cases} \quad (16)$$

$$(17)$$

其中 $x(t) = (z(t)^T, \eta(t)^T)^T$, T 为转置号, 且 F 的阶为 $n_f = (n_1 + n_2)m$,

$$F = \begin{bmatrix} P & BH_1 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad H = [H_2, 0], \quad w(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

设增广系统是完全可观的, 则可观性矩阵

$$M = [H^T, F^T H^T, \dots, (F^T)^{n_f-1} H^T]^T \quad (19)$$

的秩为 n_f , 且其伪逆为 $M^\# = (M^T M)^{-1} M^T$. 由(16)和(17)式有

$$\begin{cases} y(t) = Hx(t) + v(t), \\ y(t+1) = Hx(t+1) + v(t+1) = H(Fx(t) + \Gamma w(t)) + v(t+1) \\ \quad = HFx(t) + H\Gamma w(t) + v(t+1), \\ \vdots \\ y(t+n_f-1) = HF^{n_f-1}x(t) + \sum_{i=0}^{n_f-2} HF^{n_f-2-i}\Gamma w(t+i) + v(t+n_f-1). \end{cases} \quad (20)$$

由(20)式应用射影性质^[1]有稳态最优滤波器为

$$\hat{x}(t/t) = M^\# \begin{bmatrix} y(t) - \hat{v}(t/t) \\ \hat{y}(t+1/t) - H\Gamma\hat{w}(t/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+n_f-1/t) - HF^{n_f-2}\Gamma\hat{w}(t/t) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

其中 $\hat{x}(t/t) = (\hat{x}(t/t)^T, \hat{\eta}(t/t)^T)^T$, 由(11)式有最优滤波器

$$\hat{s}(t/t) = H_1 \hat{\eta}(t/t). \quad (22)$$

2.3 稳态最优白噪声滤波器 $\hat{v}(t/t)$ 和 $\hat{w}(t/t)$

由(8)式知 $v(t)$ 与 $e(t-1), \dots, e(0)$ 不相关, 应用射影公式有^[1]

$$\hat{v}(t/t) = \text{proj}(v(t) | e(t)) = E(v(t)e^T(t))Q_e^{-1}e(t) = Q_v Q_e^{-1}e(t). \quad (23)$$

其中 proj 为射影记号, E 为数学期望. 又计算(8)式两边 MA 过程的相关函数可得到关系

$$D_e Q_e = (A_1 L_{n_1} R_{n_2}) Q_e, \quad (24)$$

将其代入(23)式有稳态最优白噪声滤波器 $\hat{v}(t/t)$ 为

$$\hat{v}(t/t) = (A_1 L_{n_1} R_{n_2})^{-1} D_e e(t). \quad (25)$$

其中设 $(A_1 L_{n_1} R_{n_2})$ 是非异的. 由(8)式知 $e(t)$ 与 $e(t), e(t-1), \dots, e(0)$ 不相关, 因而有

$$\hat{w}(t/t) = (\hat{v}(t/t)^T, 0)^T. \quad (26)$$

2.4 稳态最优输出递推预报器 $\hat{y}(t+i/t)$

由(9)式有稳态最优输出递推预报器为^[1]

$$L_0^{-1} A(\bar{q}^{-1}) L(\bar{q}^{-1}) P(\bar{q}^{-1}) \hat{y}(t+i/t) = D_i(\bar{q}^{-1}) e(t+i). \quad (27)$$

其中 $i=1, 2, \dots, n_f-1$, 且 $D_i(\bar{q}^{-1}) = D_0 \bar{q}^{-i} + \dots + D_{n_f} \bar{q}^{-n_f}$; 当 $i > n_f$ 时, $D_i(\bar{q}^{-1}) = 0$. 波号 $\sim$ 表示只对 $\hat{y}(t+i/t)$ 的第一个时标 $t+i$ 运算.

注意, 将 $\hat{v}(t/t)$, $\hat{w}(t/t)$ 和 $\hat{y}(t+i/t)$ 代入(21)式便得到 $\hat{x}(t/t)$, 进而由(22)式得 $\hat{s}(t/t)$.

3 自校正去卷滤波器 $\hat{s}(t/t)$

(25)~(27)式表明, $\hat{v}(t/t)$, $\hat{w}(t/t)$, $\hat{y}(t+i/t)$ 完全由 ARMA 新息模型(9)式决定. 因此当 $A(\bar{q}^{-1})$, $C(\bar{q}^{-1})$, Q_e 未知时, 可避免辨识 $C(\bar{q}^{-1})$, Q_e , 引入新的观测过程 $y^*(t) = L(\bar{q}^{-1}) P(\bar{q}^{-1}) y(t)$, 用递推增广最小二乘法(RELS)^[1], 可得(9)式中 $A(\bar{q}^{-1})$ 和 $D(\bar{q}^{-1})$ 的系数阵在

时刻 t 的估值 $\hat{\lambda}_i(t)$ 和 $\hat{D}_i(t)$, 且新息估值 $\hat{\varepsilon}(t)$ 可由 (9) 式递推计算为

$$\hat{\varepsilon}(t) = L_0^{-1} \hat{\lambda}(q^{-1}) L(q^{-1}) P(q^{-1}) y(t) - \hat{D}_1(t) \hat{\varepsilon}(t-1) - \dots - \hat{D}_{n_d}(t) \hat{\varepsilon}(t-n_d). \quad (28)$$

将估值 $\hat{\lambda}_i(t)$, $\hat{D}_i(t)$ 和 $\hat{\varepsilon}(t)$ 代入 (25)~(27) 和 (21), (22) 式便得到自校正去卷滤波器 $\hat{s}(t/t)$. 显然, 假如 RELS 参数估计是一致的, 即 $\hat{\lambda}_i(t) \rightarrow A_i$, $\hat{D}_i(t) \rightarrow D_i$, $t \rightarrow \infty$, 则自校正去卷滤波器 $\hat{s}(t/t)$ 将渐近于最优去卷滤波器 $s(t/t)$.

4 仿真例子

考虑两通道非平稳 ARMA 信号 $s(t)$, 设在 (1) 式中 $A(q^{-1}) = I_2 + A_1 q^{-1}$, $C(q^{-1}) = C_1 q^{-1}$, 且未知参数阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.6 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

设在观测方程 (2) 式中 $P(q^{-1}) = I_2 + P_1 q^{-1}$, $B(q^{-1}) = I_2 q^{-1}$, $R(q^{-1}) = I_2 + R_1 q^{-1}$, 且已知参数阵为

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad R_1 = -\frac{1}{2} I_2. \quad (30)$$

且已知 $Q_0 = \text{diag}(1, 1)$, 未知 $Q_\infty = \text{diag}(0.25, 0.25)$.

应用本文方法仿真结果如图 1 至图 4 所示. 可看到未知参数阵 $A_1 = (a_{ij})$ 的 RELS 参数估值 $\hat{a}_{ij}(t)$ 分别收敛于相应的真实值 a_{ij} , 且自校正去卷滤波器 $\hat{s}(t/t) = (\hat{s}_1(t/t), \hat{s}_2(t/t))^T$ 对真实信号 $s(t) = (s_1(t), s_2(t))^T$ 具有良好的跟踪性能.

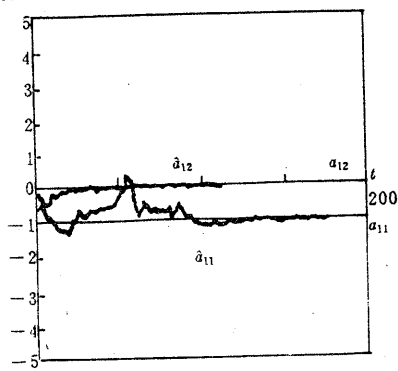


图 1 RELS 参数估值 $\hat{a}_{11}$ 和 $\hat{a}_{12}$ 的收敛性

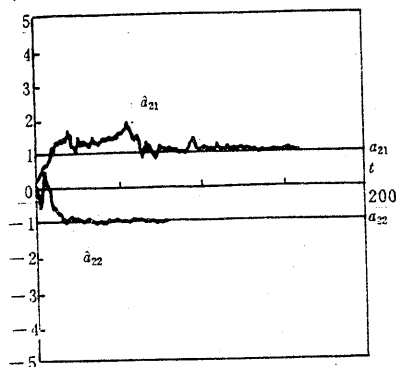


图 2 RELS 参数估值 $\hat{a}_{21}$ 和 $\hat{a}_{22}$ 的收敛性

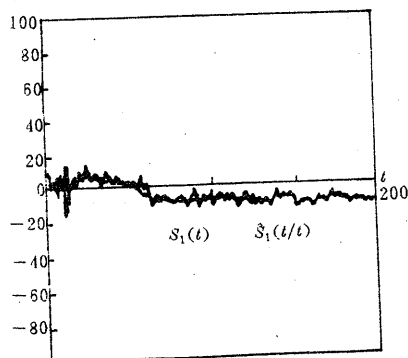


图 3 通道 1 真实信号 $s_1(t)$ 和自校正去卷滤波器 $\hat{s}_1(t/t)$

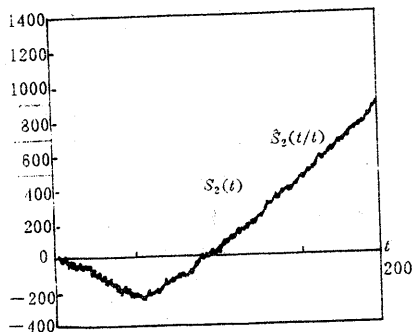


图 4 通道 2 真实信号 $s_2(t)$ 和自校正去卷滤波器 $\hat{s}_2(t/t)$

参 考 文 献

- [1] 邓自立, 郭一新. 现代时间序列分析及其应用, 建模、滤波、去卷、预报和控制. 北京: 知识出版社, 1989
- [2] Mendel, J. M. . White Noise Estimators for Seismic Data Processing in Oil Exploration. IEEE Trans. Automat. Contr., 1977, AC-22(5): 694—706
- [3] Mendel, J. M. and Kormylo, J. . New Fast Optimal White-Noise Estimators for Deconvolution. IEEE Trans. Geosci. Electron., 1977, GE-15(1): 32—41
- [4] Ahlen, A. and Sternad, S. . Optimal Deconvolution Based on Polynomial Methods. IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, ASSP-37(2): 217—226
- [5] Deng, Zili. White Noise Filter and Smoother with Application to Seismic Data Deconvolution. Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp. on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, 1985, 621—624
- [6] 邓自立. 应用于地震数据去卷的自校正白噪声估值器. 自动化学报, 1986, 12(2): 156—161
- [7] 邓自立. ARMA 信号的自校正去卷平滑器. 自动化学报, 1989, 15(6): 523—530
- [8] 韩京清等. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985
- [9] Priestley, M. B. . Spectral Analysis and Time Series, V. 2: Multivariate Series, Prediction and Control, Academic Press, New York, 1981

A Self-Tuning Deconvolution Filter for Multichannel Nonstationary ARMA Signals

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University • Harbin, 150080, PRC)

ZHANG Huanshui

(Tai'an Teachers' College • Shandong Tai'an, 271000, PRC)

Abstract: Using the modern time series analysis method, based on ARMA innovation model, this paper presents a new self-tuning deconvolution filtering approach for the multichannel nonstationary ARMA signals observed through a known linear system. Simulation example shows its usefulness.

Key words: multichannel nonstationary ARMA signals; deconvolution filter; input estimation; self-tuning; modern time series analysis method

本文作者简介

邓自立 1938年生. 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所教授. 主要研究兴趣及领域是系统辨识, 自校正、自适应滤波理论, 信号处理, 现代时间序列分析. 应用成果曾获国家科技进步二等奖和省科技进步一等奖.

张焕水 1964年生. 1984年毕业于泰安师范专科学校数学系, 1991年于黑龙江大学应用数学研究所获工学硕士学位. 主要研究兴趣及领域是自适应 Kalman 滤波理论, 反褶积, 信号处理.