

参数化模型预测空间实现及递推预测算法

李嗣福

(中国科技大学自动化系·合肥, 230027)

摘要: 本文给出线性时不变离散系统的参数化模型(CARMA 和 CARIMA)的预测空间实现的表达式, 利用该表达式将传统的参数化模型预测算法化为状态空间递推形式, 可大大减小参数化模型预测的在线计算量, 为工程上实现自适应参数化模型预测控制带来很大方便。

关键词: 模型预测控制(MPC); 广义预测控制(GPC); 线性系统

1 前言

模型预测控制(MPC)按所用模型的形式不同分为两大类, 一类是用非参数化模型的预测控制, 如模型算法控制(MAC)^[1]和动态矩阵控制(DMC)^[2]; 另一类是用参数化模型的自适应预测控制, 如扩展预测自适应控制(EPSAC)^[3]和广义预测控制(GPC)^[4]。但不论那种 MPC, 都要在每个采样周期内, 利用被控系统的模型对被控系统在未来若干采样时刻的输出值进行预测。传统 MPC 算法进行这种预测的计算量相对很大, 占整个 MPC 算法计算量很大一部分。^[5]通过定义被控系统未来各步输出为系统状态, 将非参数化模型(即被控系统的单位方波或单位阶跃响应有限序列)化为状态空间表达式的形式, 实现了被控系统未来多步预测输出的迭代计算, 使预测计算量大大减小。本文按照^[5]的思路, 将描述被控系统的参数化模型(CARMA 和 CARIMA)通过预测空间实现, 化为状态空间表达式形式, 利用该表达式将传统的参数化模型多步预测算法化为状态空间递推形式, 从而大大减小预测的计算量, 为工程上实现参数化模型自适应预测控制带来很大方便。

2 CARMA 模型的预测空间实现和最佳预测算法

预测空间是指由以时间离散系统的未来预测输出为系统状态所构成的空间。

设被控系统为一线性时不变时间离散系统, 由 CARMA 模型描述, 即

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k), \quad (1)$$

或

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k). \quad (2)$$

式中 $y(k)$, $u(k)$ 分别为系统输出和控制输入; $e(k)$ 为均值为零的白噪声序列。

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_nq^{-n},$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_mq^{-m},$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \cdots + c_nq^{-n}.$$

q^{-1} 为时间后移算子。

用 CARMA 模型(1)或(2)式描述的系统可以等效地用如下预测空间状态表达式

描述.

$$\begin{cases} X(k+1) = GX(k) + Fu(k) + De(k), \\ y(k) = HX(k) + d_0e(k). \end{cases} \tag{3}$$

式中 $X(k)=[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), \dots, x_N(k)]^T$ 为预测空间状态向量. $N \geq n$ 为预测空间维数.

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad F = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}_{N \times 1}, \\ H &= [1, 0, \dots, 0]_{1 \times N}, \\ \begin{cases} h_0 = 0, \quad h_1 = b_1, \\ h_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_j h_{i-j}, \quad nb \geq i \geq 2, \\ h_i = - \sum_{j=1}^n a_j h_{i-j}, \quad N \geq i > nb. \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

或

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 & \\ & a_n & \dots & \dots & a_1 & \ddots \\ & 0 & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & & a_n & \dots & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{nb} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\begin{cases} d_0 = 1, \\ d_i = C_i - \sum_{j=1}^i a_j d_{i-j}, \quad nc \geq i \geq 1, \\ d_i = - \sum_{j=1}^n a_j d_{i-j}, \quad N \geq i > nc. \end{cases} \tag{7}$$

或

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ & a_2 & a_1 & \ddots & & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ & & a_n & \cdots & \cdots & a_1 & \ddots \\ & 0 & \ddots & & & \ddots & \ddots \\ & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{nc} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其实 $h_i (i=1, 2, \dots, N)$ 和 $d_i (i=0, 1, \dots, N)$ 就是系统输出 $y(k)$ 分别对输入 $u(k)$ 和 $e(k)$ 的单位方波响应序列的前 N 项序列值。

预测空间状态表达式(3)和(4)对应状态信流图如图1所示。由状态信流图,用梅孙公式可以推得(推导从略),由(3)和(4)式描述的系统,其输出 $y(k)$ 与输入 $u(k)$ 和 $e(k)$ 的关系与(2)式相同。即

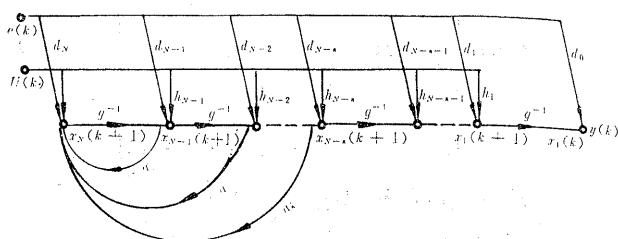


图1 预测空间状态信流图

$$y(k) = x_1(k) + e(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k). \quad (9)$$

这表明状态表达式(3),(4)确是系统(1)或(2)的一种状态空间实现,并可证明该空间各状态就是系统未来各步预测输出。

将(9)或(2)式改写为

$$\begin{aligned} y(k) &= -(a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_nq^{-n})y(k) + (b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-nb})u(k) \\ &\quad + (c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \cdots + c_{nc}q^{-nc})e(k) + e(k) \\ &= y_p(k|k-1) + e(k). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{这里 } y_p(k|k-1) \triangleq -(a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n})y(k) + (b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-nb})u(k) + (c_1q^{-1} + \cdots + c_{nc}q^{-nc})e(k). \quad (11)$$

由(11)式, $y_p(k|k-1)$ 是由 $k-1$ 步及其以前各步的系统输出 $y(k-i)$, $i=1, 2, \dots, n$, 控制输入 $u(k-i)$, $i=1, 2, \dots, nb$ 和噪声输入 $e(k-i)$, $i=1, 2, \dots, nc$ 所决定的。所以 $y_p(k|k-1)$ 是系统在 $k-1$ 步时的未来一步预测输出。比较(10)和(4)式可得

$$x_1(k) = y_p(k|k-1). \quad (12)$$

当系统处于 $k-1$ 步, 输入 $u(k)$, $e(k)$ 尚未作用于系统, 即此时 $u(k)=0$, $e(k)=0$ 。由(12)和(3)式得

$$\begin{cases} y_p(k+1|k-1) = qy_p(k|k-1) = qx_1(k) = x_2(k), \\ y_p(k+2|k-1) = qy(k+1|k-1) = qx_2(k) = x_3(k), \\ \dots \\ y_p(k+N-1|k-1) = qx_{N-1}(k) = x_N(k), \\ y_p(k+N|k-1) = qx_N(k) = -a_nx_{N-n+1}(k) - a_{n-1}x_{N-n+2}(k) - \cdots - a_1x_N(k). \end{cases} \quad (13)$$

上式中 $y_r(k+i|k-1)$, $i=1, 2, \dots, N$. 分别为系统在 $k-1$ 步时的未来多步预测输出. 上式表明, 状态表达式(3)中的系统状态的确是系统未来各步预测输出. 所以(3)和(4)式是一种预测空间的实现. 由(3)和(4)式可得对应可观性矩阵为

$$\begin{bmatrix} H \\ HG \\ \vdots \\ HG^{N-1} \end{bmatrix} = I_N, \quad (14)$$

显然是满秩的, 所以(3)和(4)式描述的系统, 其状态是完全可观的. 由(3)式可得系统对控制输入 $u(k)$ 的可控性矩阵为

$$[F \quad GF \quad \dots \quad G^{N-1}F] = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_N \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ddots & \otimes \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & h_N & \ddots & \vdots \\ \vdots & h_N & \otimes & \ddots & \vdots \\ h_N & \otimes & \otimes & \dots & \otimes \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (15)$$

其中 $\otimes$ 为 $h_{N-n+1}, h_{N-n+2}, \dots, h_N$ 的线性组合. 显然可控矩阵也是满秩的, 所以系统在预测空间中的状态是完全可控的.

很明显, 预测空间的状态是不可测量的, 但由于其完全可观, 故可以由(3), (4)式建立状态观测器获得其估计值, 由此便可得到计算控制输入 $u(k)$ 所需要的系统在 $k-1$ 步时的未来2至 $N-1$ 步预测输出的估计值(设预测时域长度 $P=N-1$, 系统有一步时延, 即 $b_0=0$). 即由(4)式

$$e(k) = y(k) - HX(k). \quad (16)$$

代入(3)式得

$$X(k+1) = GX(k) + Fu(k) + D[y(k) - HX(k)], \quad (17)$$

取

$$Y_r(k-1) = [x_2(k), x_3(k), \dots, x_{N-1}(k)]^T = H_r X(k), \quad (18)$$

这里

$$Y_r(k-1) \triangleq [y_r(k+1|k-1), y_r(k+2|k-1), \dots, y_r(k+N-1|k-1)]^T,$$

$$H_r \triangleq [0_{(N-1) \times 1} \quad \vdots \quad I_{N-1}]_{(N-1) \times N}.$$

(17)式便是系统(3)的状态观测器方程. 由(17)和(18)式便构成系统未来1至 $N-1$ 步预测输出的预测算法. 可以证明该算法是最佳的.

由于控制输入 $u(k)$ 是确定信号, 只要模型准确不会引起预测误差. 为方便起见, 下面论述算法(17), (18)式的预测误差情况, 不考虑 $u(k)$ 作用, 即令 $u(k)=0$. 由(4), (13)和(17)式可得

$$\begin{cases} y(k) = x_1(k) + e(k) = y_r(k|k-1) + e(k), \\ y(k+1) = x_1(k+1) + e(k+1) = x_2(k) + d_1 e(k) + e(k+1), \\ \quad = y_r(k+1|k-1) + d_1 e(k) + e(k+1), \\ y(k+2) = x_2(k+1) + d_1 e(k+1) + e(k+2), \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = x_3(k) + d_2e(k) + d_1e(k+1) + e(k+2), \\ = y_p(k+2|k-1) + d_2e(k) + d_1e(k+1) + e(k+2), \\ \dots \\ y(k+N-1) = y_p(k+N-1|k-1) + d_{N-1}e(k) + d_{N-2}e(k+1) + \dots \\ \quad + d_1e(k+N-2) + e(k+N-1). \end{array} \right. \quad (19)$$

上式 $y(k+i)$, $i=0,1,\dots,N-1$ 分别为系统未来各步精确预测输出. 由(19)式得, 系统未来各步预测误差分别为

$$y_e(k) = [y(k) - y_p(k|k-1)] = e(k),$$

$$y_e(k+1) = [y(k+1) - y_p(k+1|k-1)] = d_1e(k) + e(k+1),$$

...

$$y_e(k+N-1) = d_{N-1}e(k) + d_{N-2}e(k+1) + \dots + d_1e(k+N-2) + e(k+N-1). \quad (20)$$

各步预测误差的均值为

$$\bar{y}_e(k+i) = E\left[\sum_{j=0}^i d_j e(k+i-j)\right] = \sum_{j=0}^i d_j Ee(k+i-j) = 0. \quad (21)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

各步预测误差的均方差为

$$\begin{aligned} \bar{y}_e^2(k+i) &= E\left[\sum_{j=0}^i d_j e(k+i-j) \sum_{j=0}^i d_j e(k+i-j)\right] \\ &= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^i d_j^2, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (22)$$

σ_e^2 为白噪声序列 $e(k)$ 的方差.

由(20), (21)和(22)式可知, 预测算法(17)和(18)式的预测误差的性质和 ARMA 模型最佳预测算法^[6]的预测误差的性质相同. 两者均为白噪声序列的滑动平均过程, 其均值均为零, 其均方差均为最小. 所以预测算法(17), (18)式和传统 ARMA 模型最佳预测算法是等价的, 也是最佳的.

3 CARIMA 模型的预测空间实现和最佳预测算法

若系统由 CARIMA 模型描述, 即

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \frac{C(q^{-1})}{1-q^{-1}}e(k), \quad (23)$$

或

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})(1-q^{-1})}\Delta u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})(1-q^{-1})}e(k) \\ &= \frac{B(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1})}\Delta u(k) + \frac{C(q^{-1})}{\bar{A}(q^{-1})}e(k). \end{aligned} \quad (24)$$

式中

$$\bar{A}(q^{-1}) = 1 + \bar{a}_1q^{-1} + \bar{a}_2q^{-2} + \dots + \bar{a}_{n+1}q^{-n-1},$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{m0}q^{-m0},$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{n0}q^{-n0}.$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1).$$

则其对应的预测空间状态表达式如下

$$X(k+1) = \tilde{G}X(k) + \tilde{F}\Delta u(k) + \tilde{D}e(k), \quad (25)$$

$$y(k) = x_1(k) + e(k) = HX(k) + \tilde{d}_0e(k). \quad (26)$$

式中

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & & 0 & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -\tilde{a}_{n+1} & -\tilde{a}_n & \cdots & -\tilde{a}_1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_N \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \\ \vdots \\ \tilde{d}_N \end{bmatrix}_{N \times 1},$$

$$N \geq n+1,$$

$$\begin{cases} \tilde{h}_0 = 0, & \tilde{h}_1 = b_1, \\ \tilde{h}_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_j \tilde{h}_{i-j}, & nb \geq i \geq 2, \\ \tilde{h}_i = -\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{a}_j \tilde{h}_{i-j}, & N \geq i > nb. \end{cases} \quad (27)$$

$\tilde{h}_i, i=1, 2, \dots, N$ 为系统输出对控制输入 $u(k)$ 的单位方波阶跃响应序列的前 N 项序列值。

$$\begin{cases} \tilde{d}_0 = 1, \\ \tilde{d}_i = C_i - \sum_{j=1}^i \tilde{a}_j \tilde{d}_{i-j}, & nc \geq i \geq 1, \\ \tilde{d}_i = -\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{a}_j \tilde{d}_{i-j}, & N \geq i > nc. \end{cases} \quad (28)$$

$\tilde{d}_i, i=0, 1, \dots, N$ 为系统输出对噪声输入的单位方波响应序列值的前 $N+1$ 项序列值。

由状态表达式(25),(26)式构成相应的最佳预测算法

$$X(k+1) = \tilde{G}X(k) + \tilde{F}\Delta u(k) + \tilde{D}[y(k) - HX(k)], \quad (29)$$

$$Y_r(k-1) = H_r X(k). \quad (30)$$

4 结束语

1) 由参数化模型的预测空间实现,导出的最佳预测算法(17)和(18)或(29)和(30),都是递推形式,即每步预测都是在前一步预测结果上加上当前一步控制输入对未来各步输出的贡献。所以预测计算量比传统参数化模型预测计算量小得多。

2) 参数化模型的预测空间实现的另一个意义在于,可以应用状态空间法来进一步深入研究参数模型预测控制系统的分析和设计问题。

3) 应用上述递推形式的最佳预测算法对系统进行参数化模型预测控制。除预测算法外,其余算法和传统的模型预测控制算法相同。若用(17)和(18)式进行预测,则相应控制算法采用传统 MAC 的控制算法;若用(29)和(30)式进行预测,则相应控制算法采用传统 DMC 控制算法。

参 考 文 献

- [1] Rouhani, R. and Mehra, R. K. . Model Algorithmic Control-Basic Properties. Automatica, 1982, 18(4):401—414
- [2] Cutler, C. R. and Ramaker, B. L. . Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm. JACC. San Francisco, 1980, WP5-B
- [3] De Keyser, R. M. C. and Van Cauwenberghe, A. R. . Extended Prediction Self-Adaptive Control. 7th IFAC Symposium on ISPE, York, 1985, 1255—1260
- [4] Clarke, D. W. , Mohtadi, C. and Tuffs, P. S. . Generalized Predictive Control Part 1. OUEL Reports 1555/84, 1984
- [5] 李嗣福. 模型算法控制的状态空间形式及算法改进. 中国科学技术大学学报, 1987, 17(4):485—494
- [6] Åström, K. J. and Wittenmark, B. . Computer Controlled System Theory and Design. Prentice-Hall Englewood Cliffe, N. J. , 1984, 287—288
- [7] 袁震东. 基于 ARMAX 模型的广义预测控制. 第6届全国控制理论及应用年会. 1986

Prediction-Space Realization of Parametric Models and Recursive Predictive Algorithm

LI Sifu

(Department of Automation, University of Science and Technology of China·Hefei, 230027, PRC)

Abstract: This paper presents expressions of Prediction-Space realization of parametric models (CARMA and CARIMA) for the linear time-invariant discrete systems. The system states are defined as the future predicted outputs of the controlled system. The conventional predictive algorithm in parametric model can be transferred into arecursive predictive algorithm in state-space form by means of the realization expressions, thus reducing substantially the amount of on-line computation to perform the prediction of the future outputs for the controlled system. It will certainly be of great benefit in implementing adaptive parametric model predictive control in practice.

Key words: MPC; GPC; linear systems

本文作者简介

李嗣福 1939年生. 教授. 1964年毕业于哈尔滨工业大学自动控制系, 并留校任教, 1974年调入中国科技大学自动化系工作, 1985年至1986年在加拿大阿尔伯达大学化工系进修. 对多变量频域法在国内推广和应用做过一些工作. 主要研究兴趣是多变量频域理论与应用, 模型预测控制, 自适应控制以及计算机工业过程控制系统等.