非线性大系统的分散镇定*

韩正之　高　峰　张钟俊
(上海交通大学自动控制系,200030)

摘要：本文研究具有强耦合互联非线性系统的反馈镇定问题. 给出了能用几乎光滑反馈镇定的 Lyapunov 条件和新的几乎光滑反馈律.

关键词：非线性互联系统；分散控制；几乎光滑反馈；镇定

1 引　言

分散控制作为大系统的一种主要控制策略曾在七十年代得到过广泛的研究. 稳定性是这方面的重要研究领域. 其中文[1,2]及[3,4]为这个领域的重要成果. 最近，大系统的分散控制又一次得到控制理论界的重视[5]，这不仅因为它是实际应用中最有效的控制手段，还因为近年来在其它领域的众多研究成果为分散控制理论的进一步发展提供了条件.

非线性系统的镇定历来是控制理论研究中最困难的课题之一. 近年来，这个难题一次又一次受到挑战，而且颇有进展[6]. 松弛反馈是新提出的最有效的镇定设计之一，它能使一些无法用光滑反馈镇定的非线性系统获得稳定. 而且一旦控制 Lyapunov 函数(参阅[7])给出后，松弛反馈律即可写出[7,8]. 作者也已经对非线性大系统提出过一个分散松弛反馈律[9]. 但是这些反馈律的设计利用了 Urysohn 引理，因而还不是完全构造性的，具体应用还存在一定的困难. 本文将给出一个构造性的几乎光滑的分散镇定设计，它的表示式要简单得多.

本文的安排如下：第一节为引言. 第二节给出一些必要的记号、约定和引理. 第三节讨论具有强耦合非线性互联系统的分散镇定. 一些进一步的注记，放在最后的结束语中.

2 记号和引理

考虑有 ν 个子系统构成的互联系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \bar{f}_i(x) + g_i(x_i)u_i, \quad i \in \underline{\nu}. \tag{2.1}$$

这里 $\underline{\nu}=\{1,2,\cdots,\nu\}$，$x^{\mathrm{T}}=[x_1^{\mathrm{T}},x_2^{\mathrm{T}},\cdots,x_\nu^{\mathrm{T}}]$，$x_i\in\mathrm{R}^{n_i}$和 $u_i\in\mathrm{R}^{m_i}$.

(2.1)可以看成是 ν 个孤立子系统

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x_i)u_i, \quad i \in \underline{\nu} \tag{2.2}$$

经耦合项 $\bar{f}_i(x)$，$i\in\underline{\nu}$ 连接而成的，从而 x_i 和 u_i 分别称为第 i 个子系统的状态和输出. $g_i(x_i)=[g_{i1}(x_i),\cdots,g_{im_i}(x_i)]$是 $n_i\times m_i$ 阶光滑函数构成的矩阵. 如果 $g_i(x_i)\equiv0$，$i\in\underline{\nu}$，那么称(2.1)是未控的或自由的互联系统，否则称为受控的. $f_i:\mathrm{R}^{n_i}\to\mathrm{R}^{n_i}$的光滑映射，$\bar{f}_i:\mathrm{R}^{n}\to\mathrm{R}^{n_i}$的光滑映

* 国家自然科学基金资助课题.
本文于1992年4月6日收到. 1993年1月9日收到修改稿.

射，其中 $n=\sum_{i=1}^{\nu} n_i$.

考虑(2.1)，设 $f_i(0)=0,\bar{f}_i(0)=0$，那么 $0\in R^n$ 便是未控的互联系统(2.1)的平衡点.

$$u_i=\psi_i(x_i),\quad \psi_i(0)=0,\quad i\in \underline{\nu} \tag{2.3}$$

称为(2.1)的分散状态反馈. 反馈(2.3)称为几乎光滑的，如果 $\psi_i: R^{n_i}\to R^{m_i}$ 是连续的，且在 $R^{n_i}/\{0\}$ 上是光滑的.

记 $R^+=[0,\infty)$. $\Phi: R^+\to R^+$ 称为是一个 K 类函数，如果它是连续的、严格递增的而且 $\Phi(0)=0$. 如果还有 $\lim\limits_{s\to\infty}\Phi(s)=0$，那么称 Φ 是 KR 类的函数.

引理 1[3] 如果对每个 $i\in\underline{\nu}$ 都有连续可微函数 $V_i: R^{n_i}\to R^+$ 和 $\Phi_{i1},\Phi_{i2}\in KR,\Phi_{i3}\in k$，使得对一切 $x_i\in R^{n_i}$ 成立：

1) $\Phi_{i1}(\|x_i\|)\leqslant V_i(x_i)\leqslant\Phi_{i2}(\|x_i\|)$；

2) $\nabla V_i(x_i)f_i(x_i)\leqslant\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|)$， $\sigma_i\in R$；

3) $\nabla V_i(x_i)\bar{f}_i(x)\leqslant[\Phi_{i3}(\|x_i\|)]^{1/2}(\sum_{j=1}^{\nu}a_{ij}[\Phi_{j3}(\|x_j\|)]^{1/2}$, $a_{ij}\in R$, $j\in\underline{\nu}$；

4) 存在 $\alpha^T=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu]$ 满足 $\alpha_i>0,i\in\underline{\nu}$，使得由(2.4)式定义的矩阵 $S=(s_{ij})$ 是负定的，其中

$$\begin{cases} s_{ij}=\alpha_i(\sigma_i+a_{ii}), & i=j; \\ s_{ij}=\dfrac{1}{2}(\alpha_i a_{ij}+\alpha_j a_{ji}), & i\neq j. \end{cases} \tag{2.4}$$

那么，末控的互联系统(2.1)是全局渐近稳定的.

引理 2[7] 如果 $a(x)$ 和 $b(x)$ 都是 x 的几乎光滑函数，且当 $b(x)=0,x\neq 0$ 时，$a(x)<0$；$b(0)=a(0)=0$，那么

$$k(x)=\begin{cases}\dfrac{a(x)+\sqrt{a^2(x)+b^4(x)}}{b(x)}, & b(x)\neq 0, \\ 0, & b(x)=0\end{cases}$$

是个几乎光滑函数.

3 强耦合互联系统的分散镇定

本节研究互联系统(2.1)的分散的、几乎光滑反馈的镇定. 先给出如下定义.

定义 1 如果存在几乎光滑的函数 $\Phi_{i1},\Phi_{i2}\in KR,\Phi_{i3}\in k$，以及几乎光滑函数 $V_i: R^{n_i}\to R^+$，使得：

1) 对于一切 $x_i\in R^{n_i}$，成立

$$\Phi_{i1}(\|x_i\|)\leqslant V_i(x_i)\leqslant\Phi_{i2}(\|x_i\|)；$$

2) 当 $\nabla V_i(x_i)g_i(x_i)=0$ 时，存在 $\sigma_i\in R$，使得

$$\nabla V_i(x_i)f_i(x_i)\leqslant\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|),$$

那么第 i 个子系统存在着能控的 Lyapunov 函数 $V_i(x_i)$.

由定义 1 的条件 1)知道 $V_i(x_i)=0$ 的充要条件是 $x_i=0$；进一步，当第 i 个末控子系统是全局渐近稳定时，就必定存在能控的 Lyapunov 函数 $V_i(x_i)$，而且 $\sigma_i<0$.

定理 1 如果互联系统(2.1)满足下列条件：

1) 每个子系统都存在能控的 Lyapunov 函数 $V_i(x_i)$；

2) 对每个 $i\in\underline{\nu}$，都存在 $a_{ij}\in\mathbf{R}, j\in\underline{\nu}$，使得矩阵 $S=(s_{ij})$ 是负定的，其中

$$s_{ij}=\alpha_i(\sigma_i+a_{ii}),\quad i=j;$$

$$s_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_i a_{ij}+\alpha_j a_{ji}),\quad i\neq j.$$

那么，存在分散的几乎光滑反馈(2.3)，使得闭环系统是全局渐近稳定的.

证　不失一般性，我们仅证 $\nu=2$ 的情形. 考虑下列互联系统：

$$\dot{x}_1=f_1(x_1)+\bar{f}_1(x_1,x_2)+\sum_{j=1}^{m_1}g_{1j}(x_1)u_{1j},\tag{3.1a}$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_2)+\bar{f}_2(x_1,x_2)+\sum_{j=1}^{m_2}g_{2j}(x_2)u_{2j},\tag{3.1b}$$

这里，我们将(2.1)中的 $g_i(x_i)u_i$ 写成 $\sum_{j=1}^{m_i}g_{ij}(x_i)u_{ij}$ 的形式. 记

$$a_i(x_i)=\nabla V_i(x_i)f_i(x_i),\quad i=1,2;$$

$$b_{ij}(x_i)=\nabla V_i(x_i)g_{ij}(x_i),\quad j\in\underline{m_i};$$

$$\beta_i(x_i)=\sum_{j=1}^{m_i}b_{ij}^2(x_i)=\|[b_{i1}(x_i)\cdots b_{im_i}(x_i)]^{\mathrm{T}}\|^2.$$

这里的范数取成欧氏范数. 由上面的定义式可知 $a_i(x_i)$，$b_{ij}(x_i)$ 和 $\beta_i(x_i)$ 都是几乎光滑的函数. 定义 1 中的条件 2)表明：当 $\beta_i(x_i)=0$ 时，

$$a_i(x_i)\leqslant\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|),\quad i=1,2.$$

记 $\psi_i(x_i)=[\psi_{i1}(x_i),\cdots,\psi_{im_i}(x_i)]^{\mathrm{T}}$，定义标量值反馈 $u_{ij}=\psi_{ij}(x_i)$ 如下：

$$u_{ij}=\psi_{ij}(x_i)=\begin{cases}-b_{ij}(x_i)\dfrac{[a_i(x_i)-\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|)]+\sqrt{[a_i(x_i)-\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|)]^2+\beta_i^4(\|x_i\|)}}{\beta_i(x_i)}, & \beta_i(x_i)\neq 0,\\ 0, & \beta_i(x_i)=0.\end{cases}\tag{3.2}$$

根据引理 2，$\psi_{ij}(x_i)$ 是几乎光滑的，而且由 $b_{ij}(x_i)$ 的定义知道 $\beta_i(0)=0$，进而 $\psi_{ij}(0)=0$. 反馈后的闭环系统为

$$\dot{x}_1=f_1(x_1)+\sum_{j=1}^{m_1}g_{1j}(x_1)\psi_{1j}(x_1)+\bar{f}_1(x_1,x_2),\tag{3.3a}$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_2)+\sum_{j=1}^{m_2}g_{2j}(x_2)\psi_{2j}(x_2)+\bar{f}_2(x_1,x_2).\tag{3.3b}$$

下面验证引理 1 的条件：

当 $\beta_i(x_i)\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}&\nabla V_i(x_i)[f_i(x_i)+\sum_{j=1}^{m_i}g_{ij}(x_i)\psi_{ij}(x_i)]\\&=\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|)-\sqrt{[a_i(x_i)-\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|)]^2+\beta_i^4(x_i)}\\&\leqslant\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|).\end{aligned}\tag{3.4a}$$

当 $\beta_i(x_i)=0$ 时，由定义 1 的条件 2)知道

$$\nabla V_i(x_i)[f_i(x_i)+\sum_{j=1}^{m_i}g_{ij}(x_i)\psi_{ij}(x_i)]=\nabla V_i(x_i)f_i(x_i)$$
$$\leqslant\sigma_i\Phi_{i3}(\|x_i\|).\tag{3.4b}$$

(3.4)式以及定理 1 的条件说明引理 1 的要求已经满足,因而(3.3)是全局渐近稳定的.　证毕.

在定理 1 中,反馈仅用来改善各个孤立子系统的性质.可以想象到,分散反馈还可以用来改善子系统间的耦合,从而使定理 1 中的条件 2)得到减弱.为了叙述这方面的进一步结论.我们先给出下述定义.

定义 2　$b(x)$是一个给定的几乎光滑函数.$a(x)$是和$b(x)$零等价的.如果在$b(x_0)=0$时,$a(x_0)=0$,且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)}{b(x)}$存在.

定理 2　如果互联系统(2.1)满足下列条件:

1) 每个子系统都存在能控的 Lyapunov 函数$V_i(x_i)$;

2) 对每个$i\in\underline{v}$都存在$a_{ij}\in\mathrm{R}, j\in\underline{v}$以及和$\beta_i(x_i)$零等价的几乎光滑函数$C_i(x_i)\geqslant 0$,$C_i(0)=0$,使得

$$\nabla V_i(x_i)\bar{f}_i(x)\leqslant[\Phi_{i3}(\|x_i\|)]^{1/2}(\sum_{j=1}a_{ij}[\Phi_{j3}(\|x_j\|)]^{1/2})+C_i(x_i);$$

(这里$\beta_i(x_i)$定义参见定理 1 的证明).

3) 存在$\alpha^{\mathrm{T}}=[\alpha_1,\cdots,\alpha_v]$满足$\alpha_i>0, i\in\underline{v}$,使得矩阵$S=(s_{ij})$是负定的,其中

$$s_{ij}=\alpha_i(\sigma_i+a_{ii}),\quad i=j;$$
$$s_{ij}=\frac{1}{2}(\alpha_i a_{ij}+\alpha_j a_{ji}),\quad i\neq j.$$

那么,存在分散的几乎光滑反馈(2.4),使得闭环系统是全局渐近稳定的.

证　我们沿用定理 1 证明中的部分记号.构造反馈律如下

$$\psi_{ij}(x_i)=\psi_{ij}^{(1)}(x_i)+\psi_{ij}^{(2)}(x_i).$$

其中$\psi_{ij}^{(1)}(x_i)$即为(3.2)式所定义的$\psi_{ij}(x_i)$,而

$$\psi_{ij}^{(2)}(x_i)=\begin{cases}-b_{ij}(x_i)\dfrac{C_i(x_i)}{\beta_i(x_i)}, & \beta_i(x_i)\neq 0,\\ 0, & \beta_i(x_i)=0.\end{cases}$$

于是$\psi_{ij}^{(2)}(0)=0$,并且由条件(2)知$\psi_{ij}^{(2)}(x_i)$是几乎光滑的,进而$\psi_{ij}(x_i)$是几乎光滑的.

如果将$\dot{x}_i=f_i(x_i)+\sum\limits_{j=1}^{m_i}g_{ij}(x_i)\psi_{ij}^{(1)}(x_i)$视为孤立子系统,而将$\bar{f}_i(x)+\sum\limits_{j=1}^{m_i}g_{ij}(x_i)\psi_{ij}^{(2)}(x_i)$当作子系统间的耦合,不难验证引理 1 的条件全部满足,从而闭环系统是全局渐近稳定的.

证毕.

我们仅以如下例题说明定理 1 的应用.

例

$$\dot{x}_{11}=-x_{11}^3-5x_{12}^3+x_{11}x_{22}+(x_{11}^2-x_{12})u_1,$$
$$\dot{x}_{12}=x_{11}x_{12}^2+x_{12}^3+x_{12}x_{21}+(x_{11}-x_{12})u_1,$$
$$\dot{x}_{21}=x_{21}^2+\frac{1}{4}x_{11}^2+(2x_{21}+x_{22})u_2,$$

$$\dot{x}_{22} = -x_{22} + \frac{1}{2}x_{12}^2 + x_{22}u_2.$$

从第3个方程可以看出原系统是不稳定的，如果取 $V_1 = \frac{1}{2}(x_{11}^2 + x_{12}^2)$ 和 $V_2 = x_{21}^2 + (x_{21} - x_{22})^2$，可以验证它们分别为孤立子系统的能控 Lyapunov 函数. 且有

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -1,$$
$$\Phi_{13}(\|x_1\|) = \|x_1\|^4,$$
$$\Phi_{23}(\|x_2\|) = \|x_2\|^2.$$

经过直接计算可得 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{10}}{4} & 0 \end{pmatrix}$，取 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则判别矩阵

$$S = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{10}}{4}) \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{10}}{4}) & -1 \end{bmatrix}$$

它是负定的，由定理1证明步骤可以设计出分散镇定反馈律.

4 结束语

上文对非线性互联系统研究了几乎光滑反馈镇定问题，给出了镇定的 Lyapunov 型条件和具体反馈律设计. 文章虽然只研究了全局渐近镇定问题，而且只有两个结论，但作者相信，本文提出了一种存在丰富潜力的大系统设计方法，因而本文采用的设计技术足以获得局部镇定、指数镇定的相定结论，还可以对非线性时变的互联系统作类似的研究. 另外，如果系统为下三角耦合的互联系统，则能得到进一步的结论，在此就不讨论了.

参考文献

[1] Wang, S. H. and Davison, E. J.. On the Stability of Decentralized Control Systems. IEEE. Trans. Automat. Contr., 1973, AC-18(5): 473—478

[2] Han Zhengzhi and Zhang Zhongjun. The Structure of Decentralized Systems, Large Scale Systems: Theory and Applications. Oxford UK Pergamon, 1990, 155—158

[3] Michel, A. N. and Miller, R. K.. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. Academic Press, New York, 1977

[4] Michel, A. N., Miller, R. K. and Tang Wagn. Lyapunov Stability of Interconnected Systems: Decomposition into Strongly Connected Subsystems. IEEE Trans. on Circuits Syst., 1978, CAS-25(9):799—809

[5] IEEE Trans. on Automatic Control. Special Issue Papers, 1991, AC-35(6):641

[6] Sontag, E. D.. Feedback Stabilization of Nonlinear Systems. Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Systems. Birkhäuser, Cambridge, MA, 1990, 61—82

[7] Tsinias, J.. Sufficient Lyapunov-Like Conditions for Stabilization. MCSS. 1989, 2:343—357

[8] Sontag, E. D.. A "Universal" Construction of Artstein's Theorem on Nonlinear Stabilization. Systems & Control Lett., 1989, 13

[9] 韩正之，高峰. 非线性系统的分散镇定. 自动化学报，1993, 19(5):600—603

Decentralized Stabilization for Nonlinear Large Scale Systems

HAN Zhengzhi, GAO Feng and ZHANG Zhongjun

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University • Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: This paper studies the problem of stabilization for nonlinear large scale systems with strong connection. The Lyapunov Conditions for stabilization by almost smooth feedback as well as the feedback law for decentralized stabilization are presented.

Key words: Nonlinear interconnected systems; decentralized control; almost smooth feedback; stabilization

本文作者简介

韩正之　1947 年生. 1982 年毕业于华东师范大学数学系，1988 年获华东化工学院工业自动化专业博士学位. 同年进上海交通大学自动控制理论与应用博士后科研流动站工作，1990 年晋升副教授. 从事控制系统设计理论研究. 目前主要兴趣是非线性系统设计理论.

高　峰　1962 年生. 1984 年毕业于曲阜师范大学数学系，1989 年获曲阜师范大学运筹学与控制理论专业硕士学位，1992 年获上海交通大学控制理论与应用专业博士学位，同年进入浙江大学工业控制研究所博士后科研流动站工作至今. 主要研究方向是自适应控制理论与非线性系统设计理论.

张钟俊　见本刊 1993 年第 2 期第 204 页.