第 10 卷第 6 期
1993 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 6
Dec., 1993

常系数线性系统稳定度的实用判据*

黄廷祝

(电子科技大学应用数学系·成都,610054)

摘要:本文对常系数线性系统$\frac{dx}{dt}=Ax$,给出几个直接由矩阵 A 的元素迅速确定系统的品质指标——稳定度的实用代数判据.

关键词:常系数线性系统;稳定度;矩阵;特征值

1 引言和记号

动力系统$\frac{dx}{dt}=f(x)$的稳定性理论有广泛的应用,而非线性系统的稳定性往往可用其线性部分来处理[1].在实用上,仅对系统的稳定性进行判定往往还不够,常需了解其品质(稳定度)[2].关于常系数线性系统$\frac{dx}{dt}=Ax$,本文给出判定其稳定度的几个简捷判据(显然也获得了系统平凡解渐近稳定的简捷判据).

记 $C^{n\times n}$,$R^{n\times n}$分别为 n 阶复和实矩阵集,$N\triangleq\{1,2,\cdots,n\}$,$Z^{n\times n}=\{(a_{ij})\in R^{n\times n}:a_{ij}\leqslant 0,i\neq j;\ i,j\in N\}$.设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$,记 $R_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,$Q_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ji}|$.

定义 1 复阵 A 仅有负实部特征值,则称 A 稳定;若存在常数 $h>0$,使 $\mathrm{Re}\lambda_i(A)<-h$,$(i\in N)$,则称 A 至少有稳定度 h[2,3].其中 $\lambda_i(A)$为 A 的特征值.

定义 2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$,若$|a_{ii}|>R_i(A)$,$i\in N$,则称 A 为严格对角占优阵,记为 $A\in D$;若存在正对角阵 X,使 $AX\in D$,则称 A 为广义对角占优阵,记 $A\in GD$.

熟知,$A\in GD$ 等价于其比较阵 $\widetilde{A}$ 为非奇 M 矩阵[4],这里 $\widetilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$为 $\tilde{a}_{ii}=|a_{ii}|$,$\tilde{a}_{ij}=-|a_{ij}|$,$(i\neq j;\ i,j\in N)$.

2 稳定度判据

我们用不同于[3]的方法导出与[3]的结果互不包含的几个关于$\frac{dx}{dt}=Ax$ 的稳定度的实用判据.

定理 1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$满足:存在常数 $h\geqslant 0$,使 $b_{ii}\triangleq a_{ii}+h<0$,$i\in N$,且 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{d_k}{1+d_k}\triangleq d<1$,则 A 至少有稳定度 h.其中

$$d_1\triangleq\max_{j\neq 1}\left|\frac{a_{1j}}{b_{jj}}\right|,\quad d_2\triangleq\max_{j\neq 2}\left|\frac{a_{2j}}{b_{22}}\right|,\quad\cdots\quad,d_n\triangleq\max_{j\neq n}\left|\frac{a_{nj}}{b_{nn}}\right|.$$

证 记 $B=(b_{ij})=A+hI$,I 为 n 阶单位阵(下同).则 $b_{ii}=a_{ii}+h$,$b_{ij}=a_{ij}$,$(i,j\in N,i\neq j)$.

---

* 电子科技大学青年科学基金资助项目.

本文于1992年4月14日收到.1993年2月19日收到修改稿.

于是 $d_1=\max\limits_{j\neq 1}\left|\frac{b_{1j}}{b_{11}}\right|,\quad d_2=\max\limits_{j\neq 2}\left|\frac{b_{2j}}{b_{22}}\right|,\quad \cdots\quad ,d_n=\max\limits_{j\neq n}\left|\frac{b_{nj}}{b_{nn}}\right|.$

由假设，显然有

$$\varepsilon \triangleq \frac{1}{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{1+d_i}\right)>0. \tag{1}$$

易知 $\varepsilon\neq+\infty$. 于是取正对角阵 $X=\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)$，其中 $x_i=\varepsilon+d_i/(1+d_i)$，$i\in N$. 由于 $x_i=x_i/1=\varepsilon+d_i/(1+d_i)>d_i/(1+d_i)$，$i\in N$，因而 $x_i>d_i(1-x_i)$，$i\in N$，即

$$x_i>\max_{j\neq i}\left|\frac{b_{ij}}{b_{ii}}\right|(1-x_i),\quad i\in N. \tag{2}$$

又由式(1)得 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n\varepsilon+\sum\limits_{i=1}^{n}[d_i/(1+d_i)]=1$，所以 $1-x_i=\sum\limits_{j\neq i}x_j$，$i\in N$. 于是据式(2)得

$$x_i>\max_{j\neq i}\left|\frac{b_{ij}}{b_{ii}}\right|\sum_{j\neq i}x_j\geqslant\frac{\max\limits_{j\neq i}|b_{ij}|}{|b_{ii}|}\sum_{j\neq i}x_j\geqslant\frac{1}{|b_{ii}|}\sum_{j\neq i}|b_{ij}|x_j,\quad (i\in N),$$

所以 $|b_{ii}|>\frac{1}{x_i}\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|x_j$，$i\in N$，即 $F=(f_{ij})\triangleq X^{-1}BX\in D$，据[5]这等价于 $B\in GD$，于是由假设 $b_{ii}=a_{ii}+h<0$，$i\in N$，和[5]之定理1有 $\mathrm{Re}\lambda(B)<0$，这里 $\lambda(B)$ 为 B 的任一特征值. 再由 $B=A+hI$ 得 $Re\lambda(A)<-h$，由定义知结论成立. 证毕.

定理 2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$ 满足：存在常数 $h\geqslant 0$ 使 $b_{ii}\triangleq a_{ii}+h<0$，$(i\in N)$，且 $|b_{ii}|>\alpha R_i(A)+(1-\alpha)Q_i(A)$ $(i\in N$，对某 $\alpha\in[0,1])$，则 A 至少有稳定度 h.

证 记 $B=(b_{ij})=A+hI$，则 $b_{ii}=a_{ii}+h$，$b_{ij}=a_{ij}$，$(i,j\in N,i\neq j)$. 由假设有 $|b_{ii}|>\alpha R_i(A)+(1-\alpha)Q_i(A)=\alpha R_i(B)+(1-\alpha)Q_i(B)$，$i\in N$. 设 B 的比较阵为 $\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})$，其中 $\tilde{b}_{ii}=|b_{ii}|$，$\tilde{b}_{ij}=-|b_{ij}|$，$i,j\in N$，$i\neq j$. 显然 $|\tilde{b}_{ii}|>\alpha R_i(\tilde{B})+(1-\alpha)Q_i(\tilde{B})$，$i\in N$. 于是 $\forall\ \varepsilon\geqslant 0$，

$$|\tilde{b}_{ii}+\varepsilon|\geqslant|\tilde{b}_{ii}|>\alpha R_i(\tilde{B})+(1-\alpha)Q_i(\tilde{B})=\alpha R_i(\tilde{B}+\varepsilon I)+(1-\alpha)Q_i(\tilde{B}+\varepsilon I),$$

$i\in N$. 因而由[6](Ostrowski 定理)知 $\tilde{B}+\varepsilon I$ 非奇，又 $\tilde{B}\in Z^{n,n}$，故据[4]知 $\tilde{B}$ 为非奇 M 矩阵，即 $B\in GD$. 再由假设 $b_{ii}<0$，$i\in N$，故据[5]的定理1得 $\mathrm{Re}\lambda(B)<0$ ($\lambda(B)$ 为 B 的任一特征值)，于是由 $B=A+hI$ 便得 $Re\lambda(A)<-h$，由定义知结论成立. 证毕.

注 1 取 $\alpha=1$，则得[3]中一结果.

定理 3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$ 满足：存在常数 $h\geqslant 0$，使 $a_{ii}+h\triangleq b_{ii}<0$ $(i\in N)$，且对某 $\alpha\in[0,1]$ 有 $|b_{ii}||b_{jj}|>R_i^{\alpha}(A)Q_i^{1-\alpha}(A)R_j^{\alpha}(A)Q_j^{1-\alpha}(A)$，$(i,j\in N,i\neq j)$，则 A 至少有稳定度 h.

证 设 $B=(b_{ij})=A+hI$，则 $b_{ii}=a_{ii}+h$，$b_{ij}=a_{ij}$，$(i,j\in N,i\neq j)$. 于是由假设有

$$|b_{ii}b_{jj}|>R_i^{\alpha}(A)Q_i^{1-\alpha}(A)R_j^{\alpha}(A)Q_j^{1-\alpha}(A)=R_i^{\alpha}(B)Q_i^{1-\alpha}(B)R_j^{\alpha}(B)Q_j^{1-\alpha}(B),(i,j\in N,i\neq j). \tag{3}$$

设 B 的比较阵(同前述)为 $\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})$，显然仍有

$$|\tilde{b}_{ii}\tilde{b}_{jj}|>R_i^{\alpha}(\tilde{B})Q_i^{1-\alpha}(\tilde{B})R_j^{\alpha}(\tilde{B})Q_j^{1-\alpha}(\tilde{B}),\quad (i,j\in N,i\neq j),$$

于是 $\forall\ \varepsilon\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}|(\tilde{b}_{ii}+\varepsilon)(\tilde{b}_{jj}+\varepsilon)|&\geqslant|\tilde{b}_{ii}\tilde{b}_{jj}|>R_i^{\alpha}(\tilde{B})Q_i^{1-\alpha}(\tilde{B})R_j^{\alpha}(\tilde{B})Q_j^{1-\alpha}(\tilde{B})\\&=R_i^{\alpha}(\tilde{B}+\varepsilon I)Q_i^{1-\alpha}(\tilde{B}+\varepsilon I)R_j^{\alpha}(\tilde{B}+\varepsilon I)Q_j^{1-\alpha}(\tilde{B}+\varepsilon I),\quad \forall\ i\neq j.\end{aligned}$$

因而由[6]知 $\tilde{B}+\varepsilon I$ 非奇，又 $\tilde{B}\in Z^{n,n}$，故据[4]知 $\tilde{B}$ 为非奇 M 阵，即 $B\in GD$. 又 $b_{ii}=a_{ii}+h<0$，$i\in N$，故据[5]中定理1知 $\mathrm{Re}\lambda(B)<0$，于是由 $B=A+hI$ 便得 $\mathrm{Re}\lambda(A)<-h$，由定义知

结论成立. 证毕.

推论 1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$ 满足:存在常数 $h\geq 0$,使 $a_{ii}+h\triangleq b_{ii}<0(i\in N)$,且 $|b_{ii}b_{jj}|>R_i(A)R_j(A),\forall\ i\neq j$. 则 A 至少有稳定度 h.

推论 2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$ 满足:存在常数 $h\geq 0$,使 $a_{ii}+h\triangleq b_{ii}<0(i\in N)$,且 $|b_{ii}|>R_i(A)Q_i^{1-\alpha}(A)$,($i\in N$,对某 $\alpha\in[0,1]$). 则 A 至少有稳定度 h.

定理 4 设 $A=(a_{ij})\in C^{n,n}$ 满足:存在常数 $h\geq 0$,使 $a_{ii}+h\triangleq b_{ii}<0(i\in N)$,且 $\sum\limits_{i\neq j}a_{ij}^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(1-b_{ii})^2<1$. 则 A 至少有稳定度 h.

证 设 $B=(b_{ij})=A+hI,Q\triangleq|I-B|=(q_{ij})$,其中 $|A|$ 表示 $(|a_{ij}|)_{n\times n}$. 于是 $q_{ii}=|1-b_{ii}|$, $q_{ij}=|a_{ij}|,i,j\in N,i\neq j$. 则由假设得

$$\|Q\|_F^2=\sum_{i,j}q_{ij}^2=\sum_{i\neq j}q_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}q_{ii}^2=\sum_{i\neq j}a_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}(1-b_{ii})^2<1.$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数,故 Q 的谱半径 $\rho(Q)\leq\|Q\|_F<1$. 又 $Q=|I-B|$ 为非负矩阵,因而据[4]中引理 2.1(chpt. 6)知 $(I-Q)^{-1}$ 存在且非负. 于是由 $I-Q\in Z^{n,n}$ 及非奇 M 阵定义知 $I-Q$ 为非奇 M 阵,因 $I-Q$ 的对角元为 $1-q_{ii}=1-|1-b_{ii}|,i\in N$. 又 $1=|(1-b_{ii})+b_{ii}|\leq|1-b_{ii}|+|b_{ii}|,i\in N$,即 $1-|1-b_{ii}|\leq|b_{ii}|,i\in N$. 记 B 的比较阵为 $\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})$. 由 $B=A+hI$ 及 $1-|1-b_{ii}|\leq|b_{ii}|$ 知 $\tilde{B}$ 的对角元大于等于 $I-Q$ 的对角元,而非对角元分别相同,又 $I-Q$ 为非奇 M 阵,因此据非奇 M 阵的比较性质直接得 $\tilde{B}$ 为非奇 M 阵,即 $B\in GD$. 故由 $b_{ii}=a_{ii}+h<0$ 及[5]中定理 1 立得 $\mathrm{Re}\lambda(B)<0$. 因而由 $B=A+hI$ 知 $\mathrm{Re}\lambda(A)<-h$,即结论成立. 证毕.

注 2 若某 $|a_{ij}|>1$,则定理 4 条件不满足,但可选择适当的常数 $T>1$,使 $\frac{1}{T}A$ 满足定理 4 的条件,则定理结论成立.

引理[7] 设 $A\in C^{n,n},B=\frac{1}{2}(A+A^*)$,则 $\min\limits_m\lambda_m(B)\leq\mathrm{Re}\lambda(A)\leq\max\limits_m\lambda_m(B)$. 其中 $\lambda_m(m\in N)$ 为 B 的特征值,$\lambda(A)$ 为 A 的任一特征值,A^* 为 A 的共轭转置.

定理 5 设 $A\in C^{n,n}$,若 $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$ 满足定理 1~4 之一的条件,则 A 至少有稳定度 h.

证 若 $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$ 满足定理 1~4 之一的条件,则由定理 1~4 知 $\lambda_m(B)<-h,m\in N$. 于是,据引理得 $\mathrm{Re}\lambda(A)\leq\max\limits_m\lambda_m(B)<-h$. 故由定义知 A 至少有稳定度 h. 证毕.

注 3 定理 1~5 互不包含,且与[3]的结果互不包含(这是易见的)

限于篇幅,满足定理 1~5 条件的例子略.

参 考 文 献

[1] И. Г. МАЯКИН. 解伯民译. 运动稳定性理论. 北京:科学出版社,1958

[2] 高为炳. 非线性控制系统绝对稳定及稳定度. 自动化学报,1965,(1):1—12

[3] 廖晓昕. 几类矩阵的稳定度、非奇度与特征值分布. 科学通报,1982,(8):460—463

[4] Berman, A. and Plemmons, R. J.. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. NY; Academic Press, 1979

[5] 游兆永,李磊. 共轭广义对角占优矩阵的特征值分布. 数学研究与评论,1989,9(2):309—310
[6] Minc, H. and Marcus, M. A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Boston; Weber & Schmidt Press, 1964
[7] 永学荣. 应用H矩阵判定矩阵的正稳定. 工程数学学报,1991,8(2):163—168

Some Pratical Criteria for the Degree of Stability of the Linear Systems with Constant Coefficients

HUANG Tinzhu
(Department of Applied Mathematics, UEST of China · Chengdu, 610054, PRC)

Abstract: In this paper, we give some practical criteria for the degree of stability of the linear systems with constant coefficients, with the aid of the entries of the coefficient matrix only.

Key words: linear system; degree of stability; matrix; eigenvalue

本文作者简介

黄廷祝　1964年生. 讲师. 1986年毕业于西安交通大学计算数学专业,此后执教于电子科技大学应用数学系计算数学教研室. 1990年在西安交通大学计算数学与应用数学研究所攻读硕士,毕业后回原工作单位. 主要研究工作兴趣为特殊矩阵及应用与数值代数.