第 10 卷第 6 期
1993 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 6
Dec., 1993

具有参数不确定性和外干扰系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制*

杨富文
(福州大学电气工程系,350002)

摘要: 本文考虑具有参数不确定性和外干扰系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制问题. 这个问题的解只需求解一个代数 Riccati 方程就可得到其状态反馈阵,且这个状态反馈阵仍保持和 LQ 最优设计相同的形式. 运用这样的状态反馈控制,既能保证具有参数不确定性系统是稳定的,又能达到 H_∞ 最优干扰抑制效果.

关键词: H_∞ 状态反馈控制; 鲁棒控制; 参数不确定性; 代数 Riccati 方程

1 引 言

八十年代初,加拿大学者 Zames[1] 首次提出了 H_∞ 优化设计问题,即设计一反馈控制器 $K(s)$ 使得闭环系统内部稳定,且外干扰对系统的输出影响最小. 在他的文献中所考虑的外干扰是一类能量有界干扰信号,比 LQG 设计中所考虑的单一白噪声干扰信号更切合实际. 因此这种新的设计方法很快在控制理论界引起了很大的反响,相继发表了不少文章[2,3]. 1987 年 Petersen[4] 采用状态反馈方法解决了 H_∞ 最优干扰抑制问题. 这种方法只要求解一个代数 Riccati 方程就可得到闭环传递函数 H_∞ 范数小于给定界 γ 的状态反馈阵. 由于其计算简单,后来许多学者也对此做了大量研究[5,6],但现有的文献只是考虑具有外干扰的系统. 本文考虑一类既具有外干扰又具有参数不确定系统. 对于这类系统,本文采用状态反馈方法只要求解一个代数 Riccati 方程就可得到状态反馈阵,这个状态反馈阵仍保持和 LQ 最优设计相同的形式.

2 鲁棒 H_∞ 状态反馈控制

考虑具有参数不确定性和外干扰的系统为

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B_1 w(t) + (B_2 + \Delta B)u(t), \tag{2.1a}$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t). \tag{2.1b}$$

式中 $w(t) \in R^{m_1}$ 为干扰输入向量, $u(t) \in R^{m_2}$ 为控制输入向量, $z(t) \in R^{p_1}$ 为被控输出向量, $x(t) \in R^n$ 为完全可量测状态向量, $(A, B_1, B_2, C_1, D_{11})$ 为名义系统矩阵, $(\Delta A, \Delta B)$ 为参数不确定性矩阵,它属于某一已知参数不确定性集合,即 $(\Delta A, \Delta B) \in U$, U 为某一已知参数不确定性集合.

对于系统(2.1)采用状态反馈控制

$$u(t) = F_\infty x(t), \tag{2.2}$$

---

* 福建省自然科学基金资助项目.

本文于1992年4月20日收到. 1993年3月9日收到修改稿.

则闭环系统为

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A + (B_2 + \Delta B)F_\infty]x(t) + B_1 w(t), \tag{2.3a}$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t). \tag{2.3b}$$

假定初始状态都为零，则 w 到 z 的闭环传递函数为

$$G_{zw}(s) = C_1[sI - A - \Delta A - (B_2 + \Delta B)F_\infty]^{-1}B_1 + D_{11}. \tag{2.4}$$

定理 2.1　对于系统(2.1)，假定

1) $\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11} > 0$,

2) 对于所有 X_∞ 有

$$(\Delta A + \Delta B F_\infty)^T X_\infty + X_\infty(\Delta A + \Delta B F_\infty) \leqslant Q_\Delta(X_\infty). \quad (\Delta A, \Delta B) \in U. \tag{2.5}$$

式中 $Q_\Delta(X_\infty)$ 是依赖于 X_∞ 的有界函数. 若采用状态反馈控制(2.2)，且存在一个非负定解 X_∞ 和实矩阵 F_∞ 满足下列代数 Riccati 方程：

$$\begin{aligned}&(A + B_2F_\infty)^T X_\infty + X_\infty(A + B_2F_\infty) + (X_\infty B_1 + C_1^T D_{11})(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1}\\ &(X_\infty B_1 + C_1^T D_{11})^T + C_1^T C_1 + Q_\Delta(X_\infty) = 0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

则

$$\| G_{zw}(s) \|_\infty \leqslant \gamma.$$

证　见文献[9].

定理 2.1 虽然可以根据式(2.6)确定 $\| G_{zw}(s) \|_\infty \leqslant \gamma$ 的状态反馈矩阵，但是不能保证闭环矩阵 $A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty$ 稳定，只有当 $(A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty, C_1)$ 可检测时才得以保证. 因此在计算和设计时还必须进一步检查闭环矩阵 $A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty$ 是否稳定. 若不稳定，还必须重新选择 X_∞ 和 F_∞ 使得闭环矩阵 $A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty$ 直至稳定为止. 下面定理给出可以保证闭环矩阵 $A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty$ 是稳定的.

定理 2.2　对于系统(2.1)，假定

1) $\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11} > 0$,

2) 对于所有 X_∞ 有

$$(\Delta A + \Delta B F_\infty)^T X_\infty + X_\infty(\Delta A + \Delta B F_\infty) \leqslant Q_\Delta(X_\infty), \quad (\Delta A, \Delta B) \in U.$$

若采用状态反馈控制(2.2)，且存在一个非负定解 X_∞ 和实矩阵 F_∞ 满足下列代数 Riccati 方程：

$$\begin{aligned}&(A + B_2F_\infty)^T X_\infty + X_\infty(A + B_2F_\infty) + (X_\infty B_1 + C_1^T D_{11})(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1}\\ &\cdot (X_\infty B_1 + C_1^T D_{11})^T + C_1^T C_1 + Q_\Delta(X_\infty) < 0,\end{aligned} \tag{2.7}$$

则 a) $\| G_{zw}(s) \|_\infty < \gamma$;

b) 闭环矩阵 $A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty$ 稳定.

式中 F_∞ 可以取 $F_\infty = -B_2^T X_\infty$.

证　根据式(2.7)有

$$\begin{aligned}&(A + \Delta A + B_2F_\infty + \Delta BF_\infty)^T X_\infty + X_\infty(A + \Delta A + B_2F_\infty + \Delta BF_\infty)\\ &+ (X_\infty B_1 + C_1^T D_{11})(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1}(X_\infty B_1 + C_1^T D_{11})^T\\ &+ C_1^T C_1 + Q_\Delta(X_\infty) - (\Delta A + \Delta BF_\infty)^T X_\infty - X_\infty(\Delta A + \Delta BF_\infty) < 0,\end{aligned} \tag{2.8}$$

又根据假定 2)有

$$Q_\Delta(X_\infty) - (\Delta A + \Delta BF_\infty)^T X_\infty - X_\infty(\Delta A + \Delta BF_\infty) \geqslant 0, \tag{2.9}$$

故由式(2.8)和式(2.9)有下列不等式成立

$$(A+\Delta A+B_2F_\infty+\Delta BF_\infty)^{\mathrm T}X_\infty+X_\infty(A+\Delta A+B_2F_\infty+\Delta BF_\infty)$$
$$+(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})(\gamma^2I-D_{11}^{\mathrm T}D_{11})^{-1}(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})^{\mathrm T}+C_1^{\mathrm T}C_1<0. \tag{2.10}$$

对于上式存在一个 $Q>0$ 使得下列等式成立

$$-Q=(A+\Delta A+B_2F_\infty+\Delta BF_\infty)^{\mathrm T}X_\infty+X_\infty(A+\Delta A+B_2F_\infty+\Delta BF_\infty)$$
$$+(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})(\gamma^2I-D_{11}^{\mathrm T}D_{11})^{-1}(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})^{\mathrm T}+C_1^{\mathrm T}C_1, \tag{2.11}$$

故可得下列等式：

$$\begin{aligned}&\gamma^2I-G_{zw}^*(s)G_{zw}(s)\\
&=\gamma^2I-D_{11}^{\mathrm T}D_{11}-B_1^{\mathrm T}\{-sI-[A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty]^{\mathrm T}\}^{-1}(C_1^{\mathrm T}D_{11}+X_\infty B_1)\\
&\quad-(D_{11}^{\mathrm T}C_1+B_1^{\mathrm T}X_\infty)\{sI-[A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty]\}^{-1}B_1\\
&\quad+B_1^{\mathrm T}\{-sI-[A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty]^{\mathrm T}\}^{-1}[(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})(\gamma^2I-D_{11}^{\mathrm T}D_{11})\\
&\quad\cdot(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})^{\mathrm T}+Q]\{sI-[A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty]\}^{-1}B_1\\
&=G^*(s)G(s)+\gamma^2I-D_{11}^{\mathrm T}D_{11}-(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})^{\mathrm T}T^{-2}(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11}),\end{aligned} \tag{2.12}$$

式中

$$T=\{(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})(\gamma^2I-D_{11}^{\mathrm T}D_{11})^{-1}(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})^{\mathrm T}+Q\}^{1/2}, \tag{2.12a}$$
$$G(s)=T[sI-A-\Delta A-(B_2+\Delta B)F_\infty]^{\mathrm T}\}^{-1}B_1-T^{-1}(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11}). \tag{2.12b}$$

显然，式(2.12)中的 $\gamma^2I-D_{11}^{\mathrm T}D_{11}-(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})^{\mathrm T}T^{-2}(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})>0$，故对于所有的 ω，$\gamma^2I-D_{zw}^*(j\omega)D_{zw}(j\omega)>0$，即 $\|G_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$.

另外因 $Q>0$，故 $(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})(\gamma^2I-G_{11}^{\mathrm T}G_{11})^{-1}(X_\infty B_1+C_1^{\mathrm T}D_{11})^{\mathrm T}+C_1^{\mathrm T}C_1+Q>0$，由 Lyapunov 方程的性质可知，当 $X_\infty\geqslant0$ 时，$A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty$ 是稳定的. 故定理 2.2 得证.

上述定理表明：采用状态反馈控制只要求解一个代数 Riccati 方程就可得到状态反馈阵 F_∞，而且既可以保证具有参数不确定性系统是稳定的，又可以使干扰到输出的传递函数的 $\mathrm H_\infty$ 范数小于 γ. 对于上述定理，关键是如何确定 $Q_\Delta(X_\infty)$，下节我们就来讨论这个问题.

3　一类参数不确定性系统的鲁棒 $\mathrm H_\infty$ 状态反馈控制

对于系统(2.1)，假定

$$[\Delta A\quad \Delta B]=HF[E_1\quad E_2]. \tag{3.1}$$

其中 H,E_1,E_2 为已知实矩阵，F 为不确定性矩阵，但 $\|F\|\leqslant1$.

定理 3.1　对于系统(2.1)，假设不确定性因素 $\Delta A,\Delta B$ 满足式(3.1)，则有

$$(\Delta A+\Delta BF_\infty)^{\mathrm T}X_\infty+X_\infty(\Delta A+\Delta BF_\infty)\leqslant X_\infty HH^{\mathrm T}X_\infty+(E_1+E_2F_\infty)^{\mathrm T}(E_1+E_2F_\infty). \tag{3.2}$$

在证明定理 3.1 之前，首先引入一个引理.

引理 3.1　对于任意的矩阵 X,Y 有

$$X^{\mathrm T}Y+Y^{\mathrm T}X\leqslant X^{\mathrm T}X+Y^{\mathrm T}Y.$$

定理 3.1 的证明

$$\begin{aligned}&(\Delta A+\Delta BF_\infty)^{\mathrm T}X_\infty+X_\infty(\Delta A+\Delta BF_\infty)\\
&=[HF(E_1+E_2F_\infty)]^{\mathrm T}X_\infty+X_\infty[HF(E_1+E_2F_\infty)]\\
&=[F(E_1+E_2F_\infty)]^{\mathrm T}H^{\mathrm T}X_\infty+X_\infty H[F(E_1+E_2F_\infty)]\\
&\leqslant X_\infty HH^{\mathrm T}X_\infty+[F(E_1+E_2F_\infty)]^{\mathrm T}[F(E_1+E_2F_\infty)]\quad(\text{据引理 }3.1)\end{aligned}$$

$$=X_\infty HH^TX_\infty + (E_1+E_2F_\infty)^TF^TF(E_1+E_2F_\infty)$$
$$\leqslant X_\infty HH^TX_\infty + (E_1+E_2F_\infty)^T(E_1+E_2F_\infty).$$

定理 3.1 得证.

定理 3.2 对于系统(2.1)，假设不确定性因素 $\Delta A,\Delta B$ 满足式(3.1)，且 $\gamma^2I-D_{11}^TD_{11}>0$. 若采用状态反馈控制(2.2)，且存在一个非负定解 X_∞ 和实矩阵 F_∞ 满足下列代数 Riccati 方程

$$(A+B_2F_\infty)^TX_\infty + X_\infty(A+B_2F_\infty) + (X_\infty B_1+C_1^TD_{11})(\gamma^2I-D_{11}^TD_{11})^{-1}(X_\infty B_1+C_1^TD_{11})^T$$
$$+\tilde{C}_1^TC_1 + X_\infty HH^TX_\infty + (E_1+E_2F_\infty)^T(E_1+E_2F_\infty) < 0, \qquad (3.3)$$

则 1) $\| G_{zw}(s) \|_\infty<\gamma$;

2) 闭环矩阵 $A+\Delta A+(B_2+\Delta B)F_\infty$ 稳定.

定理 3.2 的证明由定理 2.2 和定理 3.1 即可得证.

从定理 3.2 可以看出：式(3.3)中的 $A,B_1,B_2,C_1,D_{11},H,E_1,E_2$ 都是已知矩阵，因此只要给定一个 γ 值，就可求得 X_∞，故求法与确定性系统的 H_∞ 状态反馈控制求法相同.

4 算　例

设系统(2.1)及满足式(3.1)的各矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}6&2&1\\-3&-1&2\\0&0&0\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&3&1\\1&0&2\end{bmatrix},\quad C_1=\begin{bmatrix}5&2&1\\1&3&0\\0&2&2\end{bmatrix},$$

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.5&0.5&0\\0&0&0.5\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}10^{-3}&0&0\\0&10^{-3}&0\\0&0&10^{-3}\end{bmatrix}.$$

根据定理 3.2 的式(3.3)来求解反馈阵 F_∞，因式(3.3)是不等式代数 Riccati 方程，我们取 $Q=\begin{bmatrix}10^{-8}&0&0\\0&10^{-8}&0\\0&0&10^{-8}\end{bmatrix}$ 化式(3.3)不等式为等式代数 Riccati 方程. 通过迭代求解得到最优值 $\gamma_0=8.993600e-001$. 与之对应的

$$X_\infty=\begin{bmatrix}1.935961e+000&1.034498e-001&-1.204172e+000\\1.034498e-001&1.028378e+000&3.558760e-001\\-1.204172e+000&3.558760e-001&2.709775e+000\end{bmatrix},$$

$$F_\infty=\begin{bmatrix}-6.539673e+000&-7.696751e-001&2.106911e+000\\-2.246310e+000&-3.188512e+000&1.365437e-001\\-1.567029e+000&-1.947029e+000&-3.367083e+000\end{bmatrix}$$

参 考 文 献

[1] Zames, G.. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations. Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26:301—320

[2] Francis, B. A. and Doyle J. C.. Linear Control Theory with an H∞ Optimal Criterion. STAM J. Control and Optimization, 1987, 25:815—844

[3] Doyle, J. C.. Lecture Note in Advances in Multivariable Control. ONR/Honeywell Workshop Minneapolis, MN, 1984

[4] Petersen, I. R.. Disturbance Attenuation and H^∞ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32:427—429

[5] Zhou, K. and Khargonekar, P. P.. An Algebraic Riccati Equation Approach to H^∞ Optimization. Systems Control Lett., 1988, 11:85—92

[6] Scherer, C.. H^∞-Control by State Feedback: An Iterative Algorithm and Characterization of High-Gain Occurence. Systems Control Lett., 1989, 12:383—391

Robust H_∞ State Feedback Control for System with Parameter Uncertainty and External Disturbance

YANG Fuwen

(Department of Electrical Engineering, Fuzhou University · Fujian Fuzhou, 350002, PRC)

Abstract: This paper considers robust H_∞ state feedback control problem for systems with parameter uncertainty and external disturbance. The solution to the problem only involves one algebraic Riccati equation, and according to the algebraic Riccati equation, the state feedback matrix can be obtained, the structure of which maintains the same form as LQ optimal design. Such state feedback control can ensure that the closed-loop system with parameter uncertainty is stable and achieve optimal H_∞ disturbance attenuation.

Key words: H_∞ state feedback control; robust control; parameter uncertainty; algebraic Riccati equation

本文作者简介

杨富文 1963年生. 1990年在华中理工大学自动控制系获得博士学位,现为福州大学电气工程系副教授. 目前的主要研究方向是H_∞优化控制,不确定性系统的鲁棒分析与设计以及工程应用研究.