第 10 卷第 6 期
1993 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 10, No. 6
Dec., 1993

不确定关联大系统的分散鲁棒控制*

孙金生　王执铨　胡维礼　　胡寿松
(华东工学院自动控制系·南京,210014)　(南京航空学院,210016)

摘要: 本文考虑了一类不确定关联大系统的分散鲁棒控制问题,提出了一种采用局部状态反馈的局部最优、全局次优的分散鲁棒控制器设计方法,并用一个数值例子及仿真结果验证了这种方法.

关键词: 大系统; 鲁棒性; 分散控制; 不确定性

1 引　　言

在大系统理论及应用研究中,分散控制是一个非常重要的方面. 分散控制的出现是由于集中控制已经不适应或不能解决许多现代复杂大系统的控制问题,分散控制和集中控制在信息结构上有本质的区别,这给分散控制器的设计带来很大的困难. 分散控制设计的一个主要问题是系统的不确定性. 众所周知,不确定性会破坏系统的稳定性及动静态性能,而系统的不确定性是不可避免的. 因此,研究大系统的分散鲁棒控制问题具有重要的现实意义. 文献[1～4]研究了采用局部状态反馈设计分散控制器的问题,但都没有考虑系统参数的不确定性,设计的控制器不具有参数鲁棒性. 文献[5]考虑的是非线性关联大系统,采用的是非线性状态反馈,文献[6]虽给出用局部状态反馈设计分散鲁棒控制器的方法,但对关联项有很强的约束,故其应用范围受到很大限制.

本文对一类不确定关联大系统,提出了一种新的分散鲁棒控制器设计方法,并用数值例子及仿真结果验证了这种方法的有效性.

2 问题的描述

考虑一类由 N 个子系统 S_i 构成的不确定关联大系统 S

$$S_i:\quad \dot{x}_i(t)=[A_i+\Delta A_i(\sigma_i(t))]x_i(t)+[B_i+\Delta B_i(\sigma_i(t))]u_i(t)+\sum_{j=1}^{N}B_i[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i(t))]x_j(t), \tag{1}$$

$$x_i(0)=x_{i0},\quad i=1,2,\cdots,N.$$

其中 $x_i(t)$ 为 n_i 维状态变量,$u_i(t)$ 为 m_i 维控制变量,$\sigma_i(t)$ 为 q_i 维不确定参数变量. 假设每个子系统都是可控的,$\Delta A_i(\cdot)$,$\Delta B_i(\cdot)$,$\Delta C_{ij}(\cdot)$ 都是连续函数. 若子系统的控制律取为

$$u_i(t)=K_ix_i(t), \tag{2}$$

则闭环子系统方程为

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1992年4月20日收到. 1992年11月20日收到修改稿.

$$\hat{S}_i:\quad \dot{x}_i(t)=\{[A_i+\Delta A_i(\sigma_i(t))]+[B_i+\Delta B_i(\sigma_i(t))]K_i\}x_i(t)+\sum_{j=1}^{N}B_i[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i(t))]x_j(t), \tag{3}$$
$$x_i(0)=x_{i0},\quad i=1,2,\cdots,N.$$

分散鲁棒控制器设计的要求是:求一个分散反馈增益阵 $K=\text{block diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_N\}$ 使闭环大系统是参数鲁棒稳定的.

3 主要结果

根据 Ikeda and Siljak[4]所得的结果,若令

$$E_i\geqslant 1+\sum_{j=1}^{N}\|C_{ij}\|^2,\quad i=1,2,\cdots,N. \tag{4}$$

其中 $\|C_{ij}\|=\max[\lambda(C_{ij}^{\mathrm{T}}C_{ij})]^{1/2}$,取状态反馈增益阵

$$K_i=-\frac{E_i}{2}B_i^{\mathrm{T}}P_i,\quad i=1,2,\cdots,N. \tag{5}$$

其中 P_i 满足 Riccati 方程

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i-P_iB_i^{\mathrm{T}}B_iP_i+eI=0,\quad e>N, \tag{6}$$

则闭环大系统 $\hat{S}$ 在没有不确定性的情况是稳定的,但我们考虑的是不确定关联大系统,因而控制律要做适当的修改.

对于(1)式所示的大系统,分散鲁棒控制器可按如下步骤设计,对于每个子系统 S_i:

Step 1 确定参数不确定性及关联阵的范数界

$$\begin{cases}\|\Delta A_i(\sigma_i(t))\|\leqslant\alpha_i,\quad \|\Delta B_i(\sigma_i(t))\|\leqslant\beta_i,\\ \|\Delta C_{ij}(\sigma_i(t))\|\leqslant\eta_{ij},\quad \|C_{ij}\|\leqslant\mu_{ij}.\end{cases} \tag{7}$$

Step 2 选取子系统 S_i 的性能指标函数为

$$J_i=\int_0^{\infty}e^{2\delta_i t}(x_i^{\mathrm{T}}Q_ix_i+u_i^{\mathrm{T}}R_iu_i)\mathrm{d}t. \tag{8}$$

其中 Q_i, R_i 可分别取为

$$Q_i=q_iQ_{i0},\quad Q_{i0}\geqslant 0,\qquad R_i=r_iI. \tag{9}$$

则根据最优调节器原理可知子系统的控制律为

$$u_i(t)=K_ix_i(t)=-R_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_ix_i(t). \tag{10}$$

其中 P_i 为满足 Riccati 方程

$$(A_i+\delta_iI)^{\mathrm{T}}P_i+P_i(A_i+\delta_iI)-P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i+Q_i=0 \tag{11}$$

的对称正定解.

Step 3 验证条件

$$\alpha_i+\beta_i\|K_i\|\leqslant\frac{\lambda_m(Q_i)+2\delta_i\lambda_m(P_i)-d}{2\lambda_M(P_i)} \tag{12}$$

是否成立,其中 $\lambda_m(\cdot)$($\lambda_M(\cdot)$)为求最小(最大)特征值运算,而

$$d=\sum_{i=1}^{N}r_i\sum_{j=1}^{N}(\mu_{ij}+\eta_{ij})^2 \tag{13}$$

若不成立,则适当增加 δ_i,q_i,减小 r_i,重复 Step 2,直至条件(12)满足为止,最终所得到的

分散反馈增益阵 $K=\text{block diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_N\}$就是所设计系统的一个分散鲁棒控制器.

定理 1 对于每个子系统均可控的不确定关联大系统(1),若参数不确定性及关联阵满足

$$\begin{cases} \|\Delta A_i(\sigma_i(t))\| \leqslant \alpha_i, & \|\Delta B_i(\sigma_i(t))\| \leqslant \beta_i, \\ \|\Delta C_{ij}(\sigma_i(t))\| \leqslant \eta_{ij}, & \|C_{ij}\| \leqslant \mu_{ij}, \end{cases} \tag{14}$$

且满足

$$\alpha_i+\beta_i\|K_i\| \leqslant \frac{\lambda_m(Q_i)+2\delta_i\lambda_m(P_i)-d}{2\lambda_M(P_i)}. \tag{15}$$

其中

$$d=\sum_{i=1}^{N} r_i\sum_{j=1}^{N}(\mu_{ij}+\eta_{ij})^2, \tag{16}$$

则不确定关联大系统(1)在局部最优控制(10)分散控制下是参数鲁棒稳定的.

证 对于闭环大系统,取 Lyapunov 函数

$$V=\sum_{i=1}^{N}V_i=\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm T}P_ix_i. \tag{17}$$

其中 P_i 是(11)式的对称正定解,则

$$\begin{aligned}
\dot V_i &= \dot x_i^{\mathrm T}P_ix_i+x_i^{\mathrm T}P_i\dot x_i \\
&= x_i^{\mathrm T}(A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+(B_iK_i)^{\mathrm T}P_i+P_iB_iK_i)x_i \\
&\quad + 2x_i^{\mathrm T}P_i[\Delta A_i(\sigma_i)+\Delta B_i(\sigma_i)K_i]x_i+2x_i^{\mathrm T}P_i\sum_{j=1}^{N}B_i[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i)]x_j \\
&= x_i^{\mathrm T}(-Q_i-P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm T}P_i-2\delta_iP_i)x_i \\
&\quad + 2x_i^{\mathrm T}P_i[\Delta A_i(\sigma_i)+\Delta B_i(\sigma_i)K_i]x_i+2x_i^{\mathrm T}P_i\sum_{j=1}^{N}B_i[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i)]x_j \\
&\leqslant x_i^{\mathrm T}(-Q_i-P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm T}P_i-2\delta_iP_i)x_i+x_i^{\mathrm T}[\lambda_m(Q_i)I+2\delta_i\lambda_m(P_i)I-dI]x_i \\
&\quad + 2x_i^{\mathrm T}P_i\sum_{j=1}^{N}B_i[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i)]x_j \\
&\leqslant x_i^{\mathrm T}(-P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm T}P_i-dI)x_i+2x_i^{\mathrm T}P_iB_i\sum_{j=1}^{N}[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i)]x_j.
\end{aligned} \tag{18}$$

令

$$\varepsilon_i^2=\Big[r_i\sum_{j=1}^{N}(\mu_{ij}+\eta_{ij})^2\Big]^{-1}, \tag{19}$$

则

$$R_i^{-1}=\Big[\varepsilon_i^2\sum_{j=1}^{N}(\mu_{ij}+\eta_{ij})^2\Big]I. \tag{20}$$

故由(16)～(20)式可得

$$\begin{aligned}
\dot V &= \sum_{i=1}^{N}\dot V_i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N}\Big\{x_i^{\mathrm T}(-P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm T}P_i-dI)x_i+2x_i^{\mathrm T}P_iB_i\sum_{j=1}^{N}[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i)]x_j\Big\} \\
&\leqslant -\sum_{i=1}^{N}\Big\{\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j^{-2}x_i^{\mathrm T}x_i-\sum_{j=1}^{N}2x_i^{\mathrm T}P_iB_i[C_{ij}+\Delta C_{ij}(\sigma_i)]x_j \\
&\quad + \varepsilon_i^2\sum_{j=1}^{N}(\mu_{ij}+\eta_{ij})^2x_i^{\mathrm T}P_iB_iB_i^{\mathrm T}P_ix_i\Big\}
\end{aligned}$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\{\varepsilon_i^{-2}\|x_j\|^2 - 2\|x_j\|(\mu_{ij}+\eta_{ij})\|x_i^{\mathrm{T}}P_iB_i\| + \varepsilon_i^2(\mu_{ij}+\eta_{ij})^2\|x_i^{\mathrm{T}}P_iB_i\|^2\}$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\varepsilon_i^{-1}\|x_j\| - \varepsilon_i(\mu_{ij}+\eta_{ij})\|x_i^{\mathrm{T}}P_iB_i\|)^2 \leqslant 0.$$

故由 Lyapunov 稳定性理论可知大系统是渐近稳定的.

由上面的定理很容易得出下面两个推论：

推论 1 若 Q_i 阵取为

$$Q_i = q_iI, \tag{21}$$

则大系统鲁棒稳定的条件为

$$\alpha_i + \beta_i\|K_i\| \leqslant \frac{q_i + 2\delta_i\lambda_m(P_i) - d}{2\lambda_M(P_i)}. \tag{22}$$

推论 2 若子系统的性能指标函数取为

$$J_i = \int_0^{\infty}(x_i^{\mathrm{T}}Q_ix_i + u_i^{\mathrm{T}}R_iu_i)\mathrm{d}t. \tag{23}$$

则由最优调节器原理知局部最优反馈控制律为

$$u_i(t) = K_ix_i(t) = -R_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_ix_i(t). \tag{24}$$

其中 P_i 为 Riccati 方程

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_iA_i - P_iB_iR_i^{-1}B_i^{\mathrm{T}}P_i + Q_i = 0 \tag{25}$$

的对称正定解，则大系统鲁棒稳定的条件为

$$\alpha_i + \beta_i\|K_i\| \leqslant \frac{\lambda_m(Q_i) - d}{2\lambda_M(P_i)}. \tag{26}$$

4 设计实例

考虑如下由两个子系统构成的不确定关联大系统 S：

$$S_1:\quad \dot{x}_1(t) = \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{11}\end{bmatrix}\right\}x_1(t) + \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0\\ 0 & \sigma_{12}\end{bmatrix}\right\}u_1(t)$$

$$+ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0\\ 0 & \sigma_{12}\end{bmatrix}\right\}x_2(t),$$

$$S_2:\quad \dot{x}_2(t) = \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_{21} & \sigma_{23}\\ 0 & \sigma_{22}\end{bmatrix}\right\}x_2(t) + \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_{21} & 0\\ 0 & \sigma_{22}\end{bmatrix}\right\}u_2(t)$$

$$+ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_{22} & 0\\ 0 & \sigma_{21}\end{bmatrix}\right\}x_1(t).$$

其中，

$$x_i(t) = [x_{i1} \quad x_{i2}]^{\mathrm{T}},\quad u_i(t) = [u_{i1} \quad u_{i2}]^{\mathrm{T}},\quad i = 1,2.$$

$$\sigma_1(t) = [\sigma_{11} \quad \sigma_{12}]^{\mathrm{T}} = [0.1\sin t \quad 0.1\cos t]^{\mathrm{T}},$$

$$\sigma_2(t) = [\sigma_{21} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{23}]^{\mathrm{T}} = [0.1\cos t \quad 0.1\sin t \quad 0.2\cos t]^{\mathrm{T}}.$$

按照本文提出的方法可求得分散控制器

$$u_1(t) = \begin{bmatrix}-2.7748 & -1.2748\\ -3.8664 & 1.0916\end{bmatrix}x_1(t),\quad u_2(t) = \begin{bmatrix}1.0489 & -6.2866\\ -5.4779 & 1.0489\end{bmatrix}x_2(t).$$

是上述不确定关联大系统的分散鲁棒控制器.

图 1 和图 2 是初始条件为 $x_1(0)=[4 \quad 3]^{\mathrm{T}}, x_2(0)=[2 \quad 4]^{\mathrm{T}}$ 的仿真结果，仿真曲线表

明，根据本文提出的方法设计的分散控制器保证了大系统在参数不确定性下的全局渐近稳定.

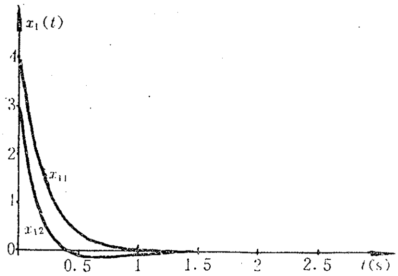

图 1　子系统 S_1 的零输入响应

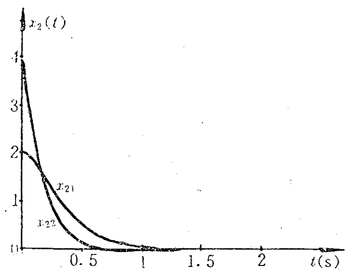

图 2　子系统 S_2 的零输入响应

5　结束语

本文讨论了一类不确定关联大系统的分散鲁棒控制问题，提出了一种新的、简单的分散鲁棒控制器设计方法，数值例子及仿真结果表明该方法计算简单、鲁棒性好. 且因采用的是局部状态反馈，易于工程实现.

参 考 文 献

[1] Wang, W. J. and Cheng, C. F.. Robustness of Perturbed Large-Scale Systems with Local Constant State Feedback. Int. J. Control, 1989, 50(1): 373—384

[2] Wang, W. J. et al. Stabilization of Large-Scale Systems with Non-Linear Perturbations via Local Feedback. Int. J. Systems Sci., 1989, 20(6):1003—1010

[3] Darwish, M. G. and Soliman, H. M.. Design of Decentralized Reliable Controllers for Large-Scale Systems. Int. J. Systems Sci., 1988, 19(8):1529—1538

[4] Ikeda, M. and Siljak, D. D.. Decentralized Stabilization of Linear Time-Varying Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1980, 25(1):106—107

[5] Chen, Y. H.. Decentralized Robust Control System Design for Large-Scale Uncertain System. Int. J. Control, 1988, 47(5):1195—1205

[6] Wu, H. S.. Decentralized Robust Control for a Class of Large-Scale Interconnected Systems with Uncertainties. Int. J. Systems Sci., 1989, 20(12):2597—2608

Decentralized Robust Control for Large-Scale Interconnected Systems with Uncertainties

SUN Jinsheng, WANG Zhiquan and HU Weili

(Department of Automatic Control, East China Institute of Technology • Nangjing, 210014, PRC)

HU Shousong

(Nanjing Aeronautical Institute • Nanjing, 210016, PRC)

Abstract: In this paper, the problem of decentralized robust control for a class of uncertain large-scale interconnected systems is considered. A design method of decentralized robust controller, which is local optimal, overall

suboptimal is proposed. An example and simulation results are given to verify the method.

Key words: large-scale systems; robustness; decentralized control; uncertainties

本文作者简介

孙金生 1967年生. 分别于1990年和1992年在华东工学院自动控制系获工学学士和工学硕士学位,现为在读博士生. 目前主要研究方向是:大系统的分散鲁棒控制,多变量系统的容错控制.

王执铨 1939年生. 现为华东工学院自动控制系教授. 目前主要研究方面是:大系统的分散鲁棒控制,多变量系统的容错控制,高精度数字伺服系统.