第 11 卷第 1 期
1994 年 2 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 1
Feb., 1994

一种新型的非参数模型及其在系统辨识中的应用*

王建奇　王行愚
(华东化工学院自动化所·上海,200237)

摘要：本文给出了一个求解广义正交多项式的微分运算矩阵的新方法；应用对连续线性系统的脉冲响应函数进行正交逼近的方法来讨论脉冲响应函数的实现问题，得到了一类新型的非参数模型，并导出了利用该模型来辨识连续线性系统的脉冲响应函数的算法；最后给出了例子证实本文所给方法的有效性.

关键词：建模；非参数模型；脉冲响应函数；实现；辨识；正交逼近

1　广义正交多项式及其性质

假设 $f(t)\in L^2_{w(t)}[a,b]$(或 $L^2_{w(t)}(a,b)$)，则由文[1]知，$f(t)$可近似展开成 $N+1$ 阶广义正交多项式级数：

$$f(t)\approx\sum_{i=0}^{N}f_i\varphi_i(t)=F^{\mathrm T}\Phi(r). \tag{1}$$

其中，系数 f_i 由下式确定

$$f_i=\frac{1}{r_i}\int_b^a w(t)f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$r_i=\int_b^a w(t)[\varphi_i(t)]^2\mathrm{d}t,\quad i=0,1,\cdots,N.$$

$\Phi(t)\triangleq[\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_N(t)]^{\mathrm T}$ 是定义在区间$[a,b]$(或(a,b))上的 $N+1$ 维广义正交多项式向量；$F=[f_0,f_1,\cdots,f_N]^{\mathrm T}$ 是函数 $f(t)$的 $N+1$ 维正交展开系数向量，$w(t)$是权函数.

对于广义正交多项式向量 $\Phi(t)$，存在矩阵 D 使得[2]

$$\dot\Phi(t)=D\Phi(t). \tag{3}$$

这里，矩阵 D 称为广义正交多项式向量 $\Phi(t)$的微分运算矩阵. 文[1]利用 Taylor 级数的基向量与广义正交多项式级数的基向量的关系和 Taylor 级数的基向量的微分运算矩阵，给出了一种求矩阵 D 的方法. 在这里，将给出一种直接利用广义正交多项式的代数递推关系来求矩阵 D 的方法.

定理 1　矩阵 D 的第(i,j)个元素 d_{ij}可表示为：

$$\begin{cases} d_{ij}=0,\quad j\geqslant i \text{ 或 } j<0,\\ d_{10}=a_0,\\ d_{(i+1)j}=a_i\delta_{ij}-c_id_{(i-1)j}\\ \qquad\qquad+\dfrac{a_i}{a_{j-1}}d_{i(j-1)}+(b_i-\dfrac{a_ib_i}{a_j})d_{ij}+\dfrac{a_ic_{j+1}}{a_{j+1}}d_{i(j+1)},\quad i=1,2,\cdots N,j>i. \end{cases} \tag{4}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1992年9月10日收到. 1993年1月5日收到修改稿.

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$, $a_i,b_i,c_i(i=0,1,\cdots,N)$是广义正交多项式的代数递推系数[1].

证　结论中的第一和第二个式子显然成立. 由广义正交多项式的代数递推关系式[1]有

$$t\varphi_j(t)=\frac{c_j}{a_j}\varphi_{j-1}(t)-\frac{b_j}{a_j}\varphi_j(t)+\frac{1}{a_j}\varphi_{j+1}(t), \tag{5}$$

$$\dot{\varphi}_{i+1}(t)=a_i\varphi_i(t)+a_it\dot{\varphi}_i(t)+b_i\dot{\varphi}_i(t)-c_i\dot{\varphi}_{i-1}(t), \tag{6}$$

将式(3)代入式(6)并应用式(5)和结论的第一个式子有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{i}d_{(i+1)j}\varphi_j(t)=&a_i\varphi_i(t)+a_i\sum_{j=0}^{i-1}d_{ij}\left[\frac{c_j}{a_j}\varphi_{j-1}(t)-\frac{b_j}{a_j}\varphi_j(t)+\frac{1}{a_j}\varphi_{j+1}(t)\right]\\&+b_i\sum_{j=0}^{i-1}d_{ij}\varphi_j(t)-c_i\sum_{j=0}^{i-2}d_{(i-1)j}\varphi_j(t).\end{aligned} \tag{7}$$

令方程(7)两边正交多项式 $\varphi_j(t)$的系数相等即得结论的第三个式子.　　证毕.

2　连续线性系统的非参数模型

设某一满足因果律的定常连续线性 SISO 系统的脉冲响应函数为 $g(t)$，且该系统在 a 时刻为松驰的. 则当系统的输入为 $u(t)$时，系统的输出 $y(t)$可表示为

$$y(t)=\int_a^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

当 $g(t)\in L^2_{w(t)}[a,b]$(或 $L^2_{w(t)}(a,b)$)时，由(2)可以令

$$g(t)\approx\sum_{i=0}^{N}g_i\varphi_i(t)=G^{\mathrm{T}}\Phi(t). \tag{9}$$

将式(9) 代入式(8) 有

$$y(t)\approx G^{\mathrm{T}}\int_a^t\Phi(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

令

$$x(t)=\int_a^t\Phi(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

则式(10) 可写成

$$y(t)\approx G^{\mathrm{T}}x(t). \tag{12}$$

式(11)两边同时对 t 求导并应用式(3)和式(11)有：

$$\dot{x}(t)=Dx(t)+\Phi(a)u(t), \tag{13}$$

$$x(a)=0. \tag{14}$$

这样，用脉冲响应函数 $g(t)$描述的系统被用式(13)，(14)和(12)所示的状态空间模型近似. 该模型是一个非参数模型，它兼有脉冲响应函数和状态空间模型的优点[3].

3　脉冲响应函数的辨识

如果输入函数 $u(t)$可用式

$$u(t)\approx\sum_{i=0}^{N}u_i\varphi_i(t)=U^{\mathrm{T}}\Phi(t) \tag{15}$$

近似，那么应用文[4]给出的正交逼近方法可知：式(13)，(14)和(12)所示的状态空间模型的输出函数 $y(t)$可近似表示为

$$y(t)\approx G^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{N+1}D^{N+1-i}\Phi(a)U^{\mathrm{T}}P_a^{N+2-i})\Phi(t). \tag{16}$$

其中 P_a 是文[1]定义的广义正交多项式向量 $\Phi(t)$在时刻 a 的积分运算矩阵.

令 $H(t)=\Phi^{\mathrm{T}}(t)[\sum_{i=1}^{N+1}(P_a^{N+2-i})^{\mathrm{T}}U\Phi^{\mathrm{T}}(a)(D^{N+1-i})^{\mathrm{T}}]$. 用 $\varepsilon(t)$表示由量测与各步逼近所引起的误差,那么 $y(t)$可精确地表示为

$$y(t) = H(t)G + \varepsilon(t). \tag{17}$$

这样,根据已知输入函数 $u(t)$和对应的输出量测 $y(t_j)(j=1,2,\cdots,M)$来辨识过程的脉冲响应函数 $g(t)$这一问题转化为根据输入函数 $u(t)$的正交展开系数向量 U 和对应的输出量测 $y(t_j)(j=1,2,\cdots,M)$来辨识过程的脉冲响应函数 $g(t)$的正交展开系数向量 G.

按照最小二乘法的原理,G 的辨识问题可表示为:求得参数 G 的估计 $\hat{G}$,使得如下性能指标最小

$$J = \sum_{j=1}^{M}[y(t_j) - H(t_j)G]^2. \tag{18}$$

由于当 $N\to\infty$时,各步逼近所引起的误差趋于零. 这样,当量测噪声为零均值且和 H 不相关的平稳随机序列时,ε 将是零均值、与 H 不相关的平稳随机序列. 由此,如果 $\lim\limits_{t\to\infty}[\frac{1}{M}H^{\mathrm{T}}H]^{-1}$为非异常矩阵,该问题的最小二乘解一致收敛,并可表示为[5]:

$$\hat{G} = (H^{\mathrm{T}}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}Y.$$

其中

$$\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon(t_1)\\ \vdots \\ \varepsilon(t_M)\end{bmatrix},\quad Y = \begin{bmatrix}y(t_1)\\ \vdots \\ y(t_M)\end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix}H(t_1)\\ \vdots \\ H(t_M)\end{bmatrix}.$$

按照递推最小二乘法的原理,G 的估计 $\hat{G}$ 也可由下式递推给出:

$$\hat{G}(j) = \hat{G}(j-1) + \frac{P(j-1)H^{\mathrm{T}}(t_j)}{\beta + H(t_j)P(j-1)H^{\mathrm{T}}(t_j)}[y(t_j) - H(t_j)\hat{G}(j-1)],$$

$$P(j) = \frac{1}{\beta}[P(j-1) - \frac{P(j-1)H^{\mathrm{T}}(t_j)H(t_j)P(j-1)}{\beta + H(t_j)P(j-1)H^{\mathrm{T}}(t_j)}],\quad j = 1,2,\cdots,M.$$

与之相对应,脉冲响应函数可分别表示为:

$$g(t) = \hat{G}^{\mathrm{T}}\Phi(t)$$

和

$$g_j(t) = \hat{G}^{\mathrm{T}}(j)\Phi(t),\quad j = 1,2,\cdots,M.$$

评注 通过分析知道,参数 N 的确定问题可以归结成:检验 $\|\sum_{i=0}^{N+1}\hat{g}_i^{(N+1)}\varphi_i(t) - \sum_{i=0}^{N}\hat{g}_i^{(N)}\varphi_i(t)\|_2$是否有显著下降.

其中 $\hat{g}_i^{(N+1)}(i=0,1,\cdots,N+1)$和 $\hat{g}_i^{(N)}(i=0,1,\cdots,N)$分别是用上述方法求得的 $g(t)$的 $N+1$ 项和 N 项展开系数.

由于

$$\|\sum_{i=0}^{N+1}\hat{g}_i^{(N+1)}\varphi_i(t) - \sum_{i=0}^{N}\hat{g}_i^{(N)}\varphi_i(t)\|_2 = \sum_{i=0}^{N}(\hat{g}_i^{(N+1)} - \hat{g}_i^{(N)})^2 r_i + (\hat{g}_{N+1}^{(N+1)})^2 r_{N+1}, \tag{19}$$

这样,通过检验式(19),就可确定 N 的取值.

4 仿真例子

考虑如下线性系统

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}.$$

表 1 同时给出了脉冲响应函数的展开系数的估计值和真值. 在仿真时，选单位阶跃函数作为输入信号，$y(t)$的量测值取自如下方程

$$y(t) = y^*(t) + k\mathrm{gauss}(0,1).$$

式中 $y^*(t)$表示取 $u(t)=1$ 时，系统的输出轨线，Gauss(0,1)表示均值为零，方差为 1 的正态噪声，k 是表示量测水平的参数. $\{\varphi_i(t), i=0,1,\cdots,N\}$为 Laguerre 多项式，$N=5, \alpha=0, \beta=1$，采用递推算法.

表 1　$g(t)$的展开系数的估计值与真值之比较

		g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	噪信比
估计值	$K=0.0$	2.999987	−3.000015	0.9999848	−1.05449E−05	−7.265232E−06	−1.688326E−06	0
	$K=0.1$	2.99375	−3.021683	0.9708201	−0.0237915	−1.718742E−02	−4.011674E−03	0.0760159
	$K=0.5$	2.968814	−3.10836	0.8541756	−0.1188983	−8.589457E−02	−2.004842E−02	0.1699769
	$K=1.0$	2.937562	−3.216838	0.7082363	−0.2378857	−0.1718524	−4.011154E−02	0.2403838
真值		3	−3	1	0	0	0	

5 结　论

本文从一个新的角度讨论了脉冲响应函数的实现问题，得到了一类新型的非参数模型，并导出应用该模型来辨识连续线性系统的脉冲响应函数的算法. 仿真结果表明，该算法具有良好的实现性.

参 考 文 献

[1] Chang, Y. F. and Lee, T. T.. Application of General Orthogonal Polynomials to the Optimal Control of Time-Varying Linear Systems. Int. J. Control, 1986, 43(4):1283−1304

[2] Sparis, P. D. and Mouroutsos, S. G.. The Operational Matrix of Differentiation for Orthogonal Polynomial Series. Int. J. Control, 1986, 44(1):1−15

[3] 王建奇，王行愚. 一种新型的非结构模型和基于它的广义预测控制器. 自动化学报，1992，18(1)：25−32

[4] Lewis, F. L. and Mertzios, B. G.. Analysis of Singular Systems Using Orthogonal Functions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(6):527−530

[5] 韩曾晋. 自适应控制系统. 北京：机械工业出版社，1983，28−36

A New Non-Parameter Model and Its Application to System Identification

WANG Jianqi　and　WANG Shienyu

(Research Institute of Automatic Control, East China University of Chemical Technology · Shanghai, 200237, PRC)

Abstract: In this paper, a new method of solving the differentiation operetional matrix of the general orthogonal polynomials is proposed. The realization problem of impulse response function is discussed by using the method of approximation impulse response function via orthogonal polynomials, and a non-parameter model is obtained. An algorithm of identification of the impulse response function using this model is given. At last, an example is

presented to illustrated the effectiveness of this method.

Key words: modelling; non-parameter model; impulse response function; realization; identification; orthogonal approximation

本文作者简介

王建奇 1965年生.1990年获华东化工学院工业自动化专业硕士学位.现为华东化工学院自动化研究所讲师.目前主要研究方向为非线性系统,预测控制,过程控制,函数逼近方法及其在控制系统中的应用.

王行愚 1944年生.1967年毕业于上海复旦大学数学系,1981年获华东师范大学控制论专业硕士学位,1984年获华东化工学院工业自动化专业博士学位.现任华东化工学院教授,副院长.主要研究领域为系统辨识,过程控制,智能控制等.

"何潘清漪优秀论文奖"征文启事

"何潘清漪优秀论文奖"征文1994年继续由本刊办理.请应征作者注意:

1. 文章必须是用中文正式发表过的.因此,寄来的文章应是该文在所发表的刊物的抽印页或复印页.
2. 文章需一式五份.
3. 请在应征稿的首页左上方注明"何潘清漪优秀论文奖征文"字样.

《控制理论与应用》编辑部

美国哈佛大学教授何毓琦(Y. C. Ho)先生为了庆贺其母亲何潘清漪老太太九十岁生日特设此奖,借以纪念她的母爱,以及她为了支持何先生的事业所付出的辛劳.

授奖对象:

离散事件动态系统(DEDS)方面优秀中文论文的作者.

目 的:

选拔、奖励、促进和宣扬中国在DEDS领域内得到国际承认的重大成果.

条例与机构:

1. 由何毓琦先生提供的何潘清漪奖金总额为5000美元,每次授奖金额1000美元,连续颁发5次(每两次之间间隔至少为一年).5次之后,有可能追加基金继续颁发.
2. 世界各地用中文发表的关于DEDS方面的论文都有资格申请奖金.
3. 论文由国际专家小组甄别和最终评定.

   专家小组成员:曹希仁、陈翰馥、李伯天、谈自忠(组长)、饶大维、郑应平.
4. 如果某年度无合适的论文,该奖可以不颁发,但至少会颁发5次.
5. 1994年截稿日期为1994年12月31日,授奖时间为1995年5月,申请者可将论文寄到《控制理论与应用》编辑部(地址:广州市 五山 华南理工大学 邮政编码:510641).
6. 鼓励获奖者将其论文译成英文,为其发表提供帮助,借此促进在DEDS领域内工作的中国研究人员的国际合作.