

自校正 Kalman 滤波、预报、去卷、平滑新方法*

邓自立

张焕水

(黑龙江大学应用数学研究所·哈尔滨, 150080) (泰安师专数学系·山东泰安, 271000)

摘要: 本文用现代时间序列分析方法, 提出了基于白噪声估值器和输出预报器解决线性离散定常系统稳态最优和自校正 Kalman 滤波、预报、平滑问题新方法. 此方法可能应用于跟踪系统、信号处理、通讯系统等领域, 仿真例子说明了新方法的有效性.

关键词: 稳态最优滤波; 自校正滤波; 去卷; 平滑; 白噪声估值器

1 问题阐述

考虑线性离散定常系统

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma w(k), \quad (1)$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k). \quad (2)$$

其中状态向量 $x(k) \in R^n$, 观测向量 $y(k) \in R^m$, 模型噪声 $w(k) \in R^r$, 观测噪声 $v(k) \in R^m$, Φ, Γ, H 是已知的适当维数矩阵. 假设 $w(k)$ 和 $v(k)$ 是零均值、方差阵分别为 Q_w 和 Q_v 的独立的白噪声:

$$E[w(k)w(j)^T] = Q_w \delta_{kj}, \quad E[v(k)v(j)^T] = Q_v \delta_{kj}, \quad E[w(k)v(j)^T] = 0, \quad \forall k, j. \quad (3)$$

其中 E 为数学期望号, T 为转置号, δ_{kj} 为 Kronecker δ 函数. 假设该系统是完全可观、完全可控的.

当噪声统计 Q_w 和 Q_v 已知时, 最优 Kalman 滤波问题是: 基于观测 $\{y(k), y(k-1), \dots, y(0)\}$ 求状态 $x(j)$ 的最优(线性最小方差)估值器 $\hat{x}(j|k)$. 当 $j > k$ 时, 它叫预报器; 当 $j = k$ 时, 它叫滤波器; 当 $j < k$ 时, 它叫平滑器. 当噪声统计 Q_w 和 Q_v 未知时, 自校正 Kalman 滤波问题是: 基于观测 $\{y(k), y(k-1), \dots, y(0)\}$ 求 $x(j)$ 的渐近最优估值器 $\hat{x}(j|k)$. 求输入白噪声 $w(j)$ 的最优或渐近最优估值器 $\hat{w}(j|k)$ 的问题叫最优或自校正去卷(deconvolution), 去卷也叫输入估计或反卷积, 它在油田勘探地震信号处理问题中有重要应用背景^[1].

与传统的 Kalman 滤波方法不同^[2], 本文应用现代时间序列分析方法^[3], 首次揭示了白噪声估值器、输出预报器和状态估值器三者之间的关系, 提出了稳态最优和自校正 Kalman 滤波新方法, 可统一处理 Kalman 滤波、预报和平滑问题. 问题最后归结为 ARMA 新息模型的在线辨识.

2 最优状态估值器

由(1)和(2)式进行迭代有关式

* 国家自然科学基金资助课题.

本文于1992年6月18日收到, 1992年12月4日收到修改稿.

$$\begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix} x(j) = \begin{bmatrix} y(j) - v(j) \\ y(j+1) - H\Gamma w(j) - v(j+1) \\ \vdots \\ y(j+n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} H\Phi^{n-2-i}\Gamma w(j+i) - v(j+n-1) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

由完全可观性假设知可观测性阵 M 有秩 n , 即

$$M = [H^T, \Phi^T H^T, \dots, (\Phi^{n-1})^T H^T]^T, \quad \text{rank } M = n. \quad (5)$$

由射影理论^[4], $x(j)$ 的线性最小方差估值 $\hat{x}(j|k)$ 是 $x(j)$ 在由 $\{y(k), y(k-1), \dots, y(0)\}$ 所生成的线性流形上的射影. 取(4)式两边各项在该线性流形上的射影运算, 有最优状态估值器 $\hat{x}(j|k)$ 为

$$\hat{x}(j|k) = M^\# \begin{bmatrix} \hat{y}(j|k) - \hat{v}(j|k) \\ \hat{y}(j+1|k) - H\Gamma\hat{w}(j|k) - \hat{v}(j+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(j+n-1|k) - \sum_{i=0}^{n-2} H\Phi^{n-2-i}\Gamma\hat{w}(j+i|k) - \hat{v}(j+n-1|k) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中由射影性质易知: 当 $j \leq k$, $\hat{y}(j|k) = y(j)$; 当 $j \geq k$, $\hat{w}(j|k) = 0$; 当 $j > k$, $\hat{v}(j|k) = 0$. $M^\#$ 是 M 的伪逆, 由(5)式有 M 为列满秩矩阵. 于是^[5]

$$M^\# = (M^T M)^{-1} M^T. \quad (7)$$

当 M 为方阵时, 有 $M^\# = M^{-1}$.

由(6)式看出, 求最优状态估值器 $\hat{x}(j|k)$ 归结为求最优白噪声估值器 $\hat{w}(j|k)$, $\hat{v}(j|k)$ 和输出预报器 $\hat{y}(k+i|k)$. 特别当 $j=k$ 时, 最优滤波器 $\hat{x}(k|k)$ 为

$$\hat{x}(k|k) = M^\# \begin{bmatrix} y(k) - \hat{v}(k|k) \\ \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+n-1|k) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

它仅要求白噪声滤波器 $\hat{v}(k|k)$ 和输出预报器 $\hat{y}(k+i|k)$.

因传统的 Kalman 滤波估值器是线性最小方差估计^[2], 而线性最小方差估计是唯一的 (即射影唯一性), 因此最优状态估值器(6)式的精度同传统的 Kalman 滤波估值器精度是相同的, 但算法不同.

3 ARMA 新息模型

由系统完全可观、可控性假设有稳态 Kalman 预报器存在为^[3]

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi\hat{x}(k|k-1) + K\varepsilon(k), \quad (9)$$

$$y(k) = H\hat{x}(k|k-1) + \varepsilon(k). \quad (10)$$

其中 K 为稳态预报器增益阵, $\varepsilon(k)$ 是稳态新息过程, 它是零均值、方差阵为 Q_e 的白噪声. 由(9)和(10)式有

$$y(k) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}K\varepsilon(k-1) + \varepsilon(k). \quad (11)$$

其中 I_n 是 $n \times n$ 单位阵, q^{-1} 是单位滞后算子, 即 $q^{-1}x(k) = x(k-1)$. 由推广的矩阵求逆

Fadeeva 公式有^[3]

$$(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1} = \Phi(q^{-1})/A(q^{-1}). \quad (12)$$

其中矩阵多项式 $\Phi(q^{-1}) = I_n + \Phi_1 q^{-1} + \dots + \Phi_{s-1} q^{-(s-1)}$, 而多项式 $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_s q^{-s}$, 且 $q^s A(q^{-1})$ 为 Φ 的最小多项式, $s \leq n$, 为了讨论确定性起见, 设 $a_s \neq 0$, $n \times n$ 系数阵 Φ_i 为

$$\Phi_i = \Phi \Phi_{i-1} + a_i I_n, \quad \Phi_0 = I_n, \quad i = 1, 2, \dots, (s-1). \quad (13)$$

当 $s=n$ 时, 系数 a_i 可递推计算为

$$a_i = -(1/i) \text{trace}(\Phi \Phi_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (14)$$

将(12)式代入(11)式有 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(k) = D(q^{-1})\varepsilon(k). \quad (15)$$

其中 $D(q^{-1}) = I_m + D_1 q^{-1} + \dots + D_s q^{-s}$, 且 $m \times m$ 系数阵 D_i 为

$$D_i = H \Phi_{i-1} K + a_i I_m, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (16)$$

现在证明: $D(q^{-1})$ 是稳定的, 即 $\det D(x)$ 的零点位于单位圆外. 事实上, 任取(9)和(10)式的两个不同初值 $\hat{x}^{(1)}(0|-1)$ 和 $\hat{x}^{(2)}(0|-1)$, 由 Kalman 滤波的稳定性^[4], 相应的稳态预报器有关系: 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $(\hat{x}^{(1)}(k|k-1) - \hat{x}^{(2)}(k|k-1)) \rightarrow 0$. 因而由(10)式, 相应的稳态新息有关系

$$\delta(k) = (\varepsilon^{(1)}(k) - \varepsilon^{(2)}(k)) \rightarrow 0,$$

$$\text{即} \quad \delta_i(k) = (\varepsilon_i^{(1)}(k) - \varepsilon_i^{(2)}(k)) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

其中 $\delta_i(k)$, $\varepsilon_i^{(1)}(k)$, $\varepsilon_i^{(2)}(k)$ 分别为 $\delta(k)$, $\varepsilon^{(1)}(k)$, $\varepsilon^{(2)}(k)$ 的第 i 个分量. 又 $\varepsilon^{(1)}(k)$ 和 $\varepsilon^{(2)}(k)$ 均满足(15)式, 这引出差分方程

$$D(q^{-1})\delta(k) = 0. \quad (18)$$

上式两边左乘以 $\text{adj} D(q^{-1})$ 有差分方程

$$\det D(q^{-1}) I_m \delta(k) = 0,$$

$$\text{即} \quad \det D(q^{-1}) \delta_i(k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (19)$$

对固定的 i , (19)式是关于 $\delta_i(k)$ 的 ms 阶齐次差分方程, 其特解由它的 ms 个初始条件 $\delta_i(k) = (\varepsilon_i^{(1)}(k) - \varepsilon_i^{(2)}(k))$ 决定, $i = 0, 1, \dots, ms-1$. 而与任意初始条件 $\varepsilon^{(i)}(k)$, $k = 0, 1, \dots, ms-1$, $i = 1, 2$, 相应的初值 $\hat{x}^{(i)}(0|-1)$, $i = 1, 2$, 由(9)和(10)式进行迭代可得到为

$$\hat{x}^{(i)}(0|-1) = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{ms-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) - \varepsilon^{(i)}(0) \\ y(1) - HK\varepsilon^{(i)}(0) - \varepsilon^{(i)}(1) \\ \vdots \\ y(ms-1) - \sum_{j=0}^{ms-2} H\Phi^{ms-2-j} K\varepsilon^{(i)}(j) - \varepsilon^{(i)}(ms-1) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

可证明 $ms \geq n$ ^[5], 于是由(5)式知(20)式中的伪逆可按公式(7)计算. 注意齐次差分方程(19)式通解的解析表达式^[6]和初值的任意性, 由(17)式引出(19)式的特征根在单位圆内, 即 $\det D(x)$ 的零点在单位圆外. 注意: $D(q^{-1})$ 的稳定性保证了 $D(q^{-1})$ 的唯一性, 即 $D(q^{-1})$ 的可辨识性^[6].

4 稳态最优输出递推预报器

应用射影性质^[4], 由(15)式有稳态最优输出递推预报器 $\hat{y}(k+i|k)$ 为^[3,6]

$$A(q^{-1})\hat{y}(k+i|k) = D_i(q^{-1})\varepsilon(k+i), \quad (21)$$

其中 $D_i(q^{-1}) = D_i q^{-i} + \dots + D_s q^{-s}$, 且规定当 $i > s$ 时 $D_i(q^{-1}) = 0$, 且

$$A(q^{-1})\hat{y}(k+i|k) = \hat{y}(k+i|k) + a_1 \hat{y}(k+i-1|k) + \dots + a_s \hat{y}(k+i-s|k), \quad (22)$$

而(21)式中的稳态新息可由(15)式递推计算为

$$\begin{aligned} \varepsilon(j) = & y(j) + a_1 y(j-1) + \dots + a_s y(j-s) \\ & - D_1 \varepsilon(j-1) - \dots - D_s \varepsilon(j-s). \end{aligned} \quad (23)$$

其中适当取初值 $\varepsilon(j), y(j), j = -1, \dots, -s$. 由 $D(q^{-1})$ 的稳定性引出当 $j \rightarrow \infty$ 时初值对 $\varepsilon(j)$ 的影响将消除.

注意, (21)式的物理意义是: 由输出 $y(k)$ 服从 ARMA 新息模型(15)式引出 $y(k)$ 是一个相关时间序列, 因而从其现在和过去历史可预报其未来. 这正是 Box-Jenkins^[6] 的递推预报方法的物理背景. 同 Kalman 预报方法相比^[2], 优点是避免通过求状态预报器 $\hat{x}(k+i|k)$ 来求 $\hat{y}(k+i|k) = H\hat{x}(k+i|k)$.

这里“稳态”含义是 $k \rightarrow \infty$, 因而最优预报器的计算与初值选取无关.

5 稳态最优白噪声估值器

由(1)和(2)式有

$$y(k) = H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma w(k-1) + v(k), \quad (24)$$

把(12)式代入(24)式有

$$A(q^{-1})y(k) = C(q^{-1})w(k) + A(q^{-1})v(k). \quad (25)$$

其中

$$C(q^{-1}) = H\Phi(q^{-1})\Gamma q^{-1} = C_1 q^{-1} + \dots + C_s q^{-s},$$

且

$$C_i = H\Phi_{i-1}\Gamma, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (26)$$

比较(15)和(25)式有关系式

$$D(q^{-1})\varepsilon(k) = C(q^{-1})w(k) + A(q^{-1})v(k). \quad (27)$$

引入分解

$$C(q^{-1}) = D(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-(N+1)}J(q^{-1}). \quad (28)$$

其中 N 为自然数, $F(q^{-1}) = F_0 + F_1 q^{-1} + \dots + F_N q^{-N}$, F_i 为 $m \times r$ 系数阵, $J(q^{-1})$ 是 $(s-1)$ 阶矩阵多项式. 由(28)式用比较系数阵方法可得到 F_i 的递推公式

$$F_i = - \sum_{j=1}^{\min(i,s)} D_j F_{i-j} + C_i, \quad C_0 = 0, \quad F_0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (29)$$

其中规定: 若 $i > s$, 则 $C_i = 0$. 类似引入分解

$$A(q^{-1})I_m = D(q^{-1})G(q^{-1}) + q^{-(N+1)}L(q^{-1}). \quad (30)$$

其中 $G(q^{-1}) = G_0 + G_1 q^{-1} + \dots + G_N q^{-N}$, G_i 是 $m \times m$ 矩阵, 且

$$G_i = - \sum_{j=1}^{\min(i,s)} D_j G_{i-j} + a_i I_m, \quad G_0 = I_m, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

其中规定: 若 $i > s$, 则 $a_i = 0$.

由(27), (28)和(30)式有 $\varepsilon(k)$ 可分解为

$$\varepsilon(k) = F(q^{-1})w(k) + \alpha(k) + G(q^{-1})v(k) + \beta(k). \quad (32)$$

其中 $\alpha(k)$ 和 $\beta(k)$ 为如下 ARMA 过程

$$\alpha(k) = q^{-(N+1)}D^{-1}(q^{-1})J(q^{-1})w(k), \quad \beta(k) = q^{-(N+1)}D^{-1}(q^{-1})L(q^{-1})v(k). \quad (33)$$

应用射影公式^[4]和(3)式有稳态最优白噪声去卷平滑器 $\hat{w}(k|k+N)$ 为

$$\begin{aligned}\hat{w}(k|k+N) &= \sum_{j=0}^{k+N} E[w(k)\varepsilon(k+N-j)^T]Q_e^{-1}\varepsilon(k+N-j) \\ &= \sum_{j=0}^N Q_w F_{N-j}^T Q_e^{-1}\varepsilon(k+N-j).\end{aligned}\quad (34)$$

即

$$\hat{w}(k|k+N) = \sum_{i=0}^N Q_w F_i^T Q_e^{-1}\varepsilon(k+i). \quad (35)$$

特别 $N=0$ 时有白噪声滤波器 $\hat{w}(k|k)=0$. 又由(1)和(2)式知 $\hat{w}(k+N|k)=0, N>0$. 由(35)式 $\hat{w}(k|k+N)$ 可递推计算为

$$\hat{w}(k|k+N) = \hat{w}(k|k+N-1) + Q_w F_N^T Q_e^{-1}\varepsilon(k+N), \quad (36)$$

类似有稳态最优白噪声平滑器 $\hat{v}(k|k+N)$ 为

$$\hat{v}(k|k+N) = \sum_{i=0}^N Q_v G_i^T Q_e^{-1}\varepsilon(k+i), \quad (37)$$

它可递推计算为 $\hat{v}(k|k+N) = \hat{v}(k|k+N-1) + Q_v G_N^T Q_e^{-1}\varepsilon(k+N)$. (38)

特别有白噪声滤波器 $\hat{v}(k|k)$ 为

$$\hat{v}(k|k) = Q_v Q_e^{-1}\varepsilon(k), \quad (39)$$

且由(1)和(2)式易知 $\hat{v}(k+N|k)=0, N>0$.

由(32), (35)和(37)式估值误差方差阵分别为

$$E[w(k) - \hat{w}(k|k+N)][w(k) - \hat{w}(k|k+N)]^T = Q_w - \sum_{i=0}^N Q_w F_i^T Q_e^{-1} F_i Q_w, \quad (40)$$

$$E[v(k) - \hat{v}(k|k+N)][v(k) - \hat{v}(k|k+N)]^T = Q_v - \sum_{i=0}^N Q_v G_i^T Q_e^{-1} G_i Q_v, \quad (41)$$

特别 $w(k), v(k)$ 和 $\varepsilon(k)$ 均为标量时, 记相应的方差分别为 σ_w^2, σ_v^2 和 σ_e^2 , 此时所有系数阵 F_i, G_i, D_i, C_i 都是标量, 分别用相应的小写字母 f_i, g_i, d_i 和 c_i 表示, 则(35)和(37)式简化为

$$\hat{w}(k|k+N) = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_e^2} \sum_{i=0}^N f_i \varepsilon(k+i) \quad (42)$$

和
$$\hat{v}(k|k+N) = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_e^2} \sum_{i=0}^N g_i \varepsilon(k+i). \quad (43)$$

上述白噪声估值器将文献[7]的结果推广到允许输出 $y(k)$ 是非平稳的情形. 将上述 $\hat{w}(j|k), \hat{v}(j|k)$ 和 $\hat{y}(k+i|k)$ 代入(6)式便得到稳态最优状态估值器 $\hat{x}(j|k)$.

应指出, 虽然白噪声 $w(k)$ 和 $v(k)$ 本身都是不相关的随机序列, 但它们是通过状态空间模型(1)和(2)式同输出 $y(k)$ 相关联, 这使我们能基于观测 $\{y(k), y(k-1), \dots, y(0)\}$ 来估计白噪声 $w(j)$ 和 $v(j)$.

6 噪声统计辨识

当噪声统计 Q_w 和 Q_v 未知时, 为了实现自校正估值器 $\hat{w}(j|k), \hat{v}(j|k)$ 和 $\hat{x}(j|k)$, 要求估计噪声统计 Q_w 和 Q_v .

假设 $a_0 \neq 0$, 记(27)式两边的滑动平均(MA)过程为

$$\eta(k) = D(q^{-1})\varepsilon(k) = C(q^{-1})w(k) + A(q^{-1})v(k), \quad (44)$$

计算 $\eta(k)$ 的相关函数 $E[\eta(k)\eta(k-i)^T]$ 有矩阵代数方程组

$$\sum_{j=1}^s D_j Q_e D_{j-i}^T = \sum_{j=1}^s C_j Q_w C_{j-i}^T + Q_v \sum_{j=1}^s a_j a_{j-i}, \quad i = 0, 1, \dots, (s-1), \quad (45)$$

$$D_s Q_e = Q_v a_s, \quad i = s. \quad (46)$$

由(46)式引出

$$Q_v = D_s Q_e / a_s. \quad (47)$$

在(45)式中令 $i=s-1$ 有

$$D_{s-1} Q_e + D_s Q_e D_1^T = C_s Q_w C_1^T + Q_v (a_{s-1} + a_s a_1). \quad (48)$$

假设 $m \geq r$ 且 $m \times r$ 阵 C_1 和 C_s 为列满秩矩阵, 则有

$$Q_w = (C_s^T C_s)^{-1} C_s^T [(D_{s-1} Q_e + D_s Q_e D_1^T) - Q_v (a_{s-1} + a_s a_1)] C_1 (C_1^T C_1)^{-1}. \quad (49)$$

假如 $m < r$ 或 C_1 和 C_s 非列满秩, 此时可将矩阵方程组(45)式按 Q_w 的未知元素改写成线性代数方程组形式. 如能从中选出一个线性无关的方程组, 且方程个数等于 Q_w 的未知元素个数, 则可唯一解出 Q_w . 这类似于文[8]的方法.

对于 $a_s=0$ 的情形, 可用类似方法建立降阶 ARMA 新息模型和求 Q_w, Q_v .

7 自校正状态估值器

当噪声统计 Q_w 和 Q_v 未知时, 为了实现渐近最优(自校正)状态估值器(6)式, 可归结为对 ARMA 新息模型(15)式的在线辨识. 于是自校正状态估值器 $\hat{x}(j|k)$ 由如下两步组成:

第1步: 用递推推广最小二乘法(RELS)^[3]或推广 Kalman 滤波方法^[9]在线辨识 ARMA 新息模型(15)式, 可得参数阵 D_i 在时刻 k 的估值 $\hat{D}_i(k)$. 将其代入(23)式可得新息估值 $\hat{\varepsilon}(k)$. 而 Q_e 的估值 $\hat{Q}_e(k)$ 可用采样方差阵递推计算为

$$\hat{Q}_e(k) = \hat{Q}_e(k-1) + \frac{1}{k} (\hat{\varepsilon}(k) \hat{\varepsilon}^T(k) - \hat{Q}_e(k-1)). \quad (50)$$

第2步: 将有关估值代入(29), (31), (47), (49), (21), (36), (38)和(6)式可先后得估值 $\hat{F}_i(k)$, $\hat{G}_i(k)$, $\hat{Q}_v(k)$, $\hat{Q}_w(k)$, 自校正递推预报器 $\hat{y}(k+i|k)$, 自校正白噪声估值器 $\hat{w}(j|k)$, $\hat{v}(j|k)$ 和自校正状态估值器 $\hat{x}(j|k)$.

上述两步在每时刻 k 重复进行.

在一定条件下^[9], 参数估值是一致的, 即当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\hat{D}_i(k) \rightarrow D_i, i=1, 2, \dots, s$, 因而自校正状态估值器 $\hat{x}(j|k)$ 将渐近于稳态最优状态估值器(6)式.

8 仿真例子

考虑单输入单输出系统(1)和(2)式, 其中未知方差 $\sigma_w^2 = \sigma_v^2 = 1$, 且

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [1, 1], \quad (51)$$

易验证 Φ 是不稳定的、奇异的, 但该系统是完全可观、完全可控的. 由(6)式有最优平滑器 $\hat{x}(k|k+1)$ 为

$$\hat{x}(k|k+1) = \frac{1}{1.5} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) - \hat{v}(k|k+1) \\ y(k+1) - \hat{w}(k|k+1) - \hat{v}(k+1|k+1) \end{bmatrix}. \quad (52)$$

易知 Φ 的最小多项式为 $\det(qI_2 - \Phi) = q^2 - q$, 因而 $A(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$, 即 $a_1 = -1, a_2 = 0$,

这引出降阶 ARMA 新息模型

$$(1 - q^{-1})y(k) = (1 + dq^{-1})\varepsilon(k), \quad (53)$$

且(27)式化为

$$(1 + dq^{-1})\varepsilon(k) = (1 + 0.5q^{-1})q^{-1}w(k) + (1 - q^{-1})v(k). \quad (54)$$

应用(42)和(43)式可得到稳态最优白噪声估值器:

$$\hat{v}(k|k+1) = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_\varepsilon^2}[\varepsilon(k) - (1 + d)\varepsilon(k+1)], \quad (55)$$

$$\hat{v}(k+1|k+1) = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_\varepsilon^2}\varepsilon(k+1), \quad (56)$$

$$\hat{w}(k|k+1) = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_\varepsilon^2}\varepsilon(k+1). \quad (57)$$

计算(54)式两边的 MA 过程的相关函数有

$$2\sigma_v^2 + 1.25\sigma_w^2 = (1 + d^2)\sigma_\varepsilon^2, \quad (58)$$

$$-\sigma_v^2 + 0.5\sigma_w^2 = d\sigma_\varepsilon^2. \quad (59)$$

注意(55)~(57)式,不必单独估计 σ_w^2 和 σ_v^2 ,直接估计 $\sigma_w^2/\sigma_\varepsilon^2$ 和 $\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2$ 即可.由(58)和(59)式有

$$(\sigma_v^2/\sigma_\varepsilon^2) = (1 - 2.5d + d^2)/4.5; \quad (\sigma_w^2/\sigma_\varepsilon^2) = (1 + d)^2/2.25. \quad (60)$$

在(58)和(59)中令 $\sigma_w^2 = \sigma_v^2 = 1$,并消去 σ_ε^2 可求得使 $D(q^{-1})$ 稳定的 d 的真实值为

$$d = (-6.5 + \sqrt{(6.5)^2 - 4})/2 \\ = -0.157608. \quad (61)$$

用 RELS 法^[3]辨识 ARMA 新息模型(53)式,可得 d 的估值 $\hat{d}(k)$ 和新息估值 $\hat{\varepsilon}(k)$,代入(60),(55)~(57)和(52)式便得到自校正平滑器 $\hat{x}(k|k+1)$. 仿真结果如图 1~图 3 所示.图 1 为 RELS 参数估值 $\hat{d}(k)$ 的收敛性.图 2 为状态 $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ 的分量 $x_2(k)$ 和自校正平滑器 $\hat{x}_1(k|k+1)$.图 3 为分量 $x_1(k)$ 和自校正平滑器 $\hat{x}_1(k|k+1)$.可看到自校正平滑器具有良好的性能.

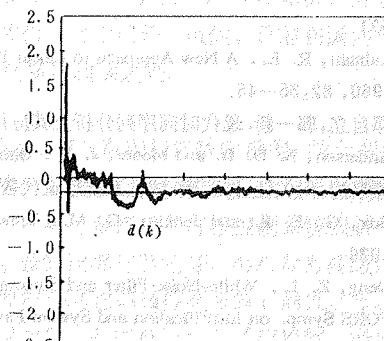


图 1 RELS 参数估值 $\hat{d}(k)$ 的收敛性

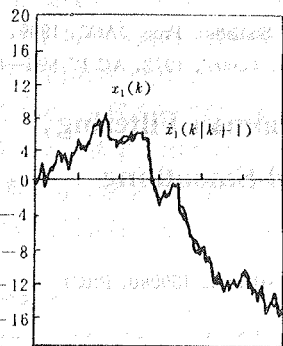


图 2 $x_1(k)$ 和自校正平滑器 $\hat{x}_1(k|k+1)$

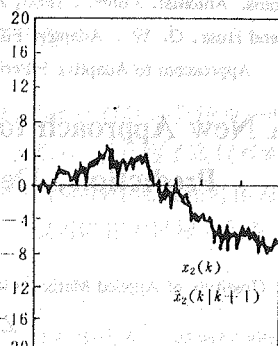


图 3 $x_2(k)$ 和自校正平滑器 $\hat{x}_2(k|k+1)$

9 结束语

1) 本文用解 Diophantine 方程(28)和(30)式方法提出了新的稳态最优白噪声估值器 $\hat{w}(j|k)$ 和 $\hat{v}(j|k)$, 且可处理 Φ 是不稳定的系统. 它完全不同于 Mendel^[1] 的基于解矩阵代数 Riccati 方程的稳态最优白噪声估值器.

2) 同稳态最优 Kalman 滤波器相比, 新方法用辨识 ARMA 新息模型取了解矩阵代数 Riccati 方程. 当噪声统计未知时, 同 Sage 和 Husa^[10] 的自适应 Kalman 滤波方法相比, 新方法避免了在 Sage 和 Husa 算法中由于噪声统计估计和状态估计的互耦性所带来的滤波发散问题. 同 Mehra^[11] 的自适应 Kalman 滤波方法相比, 新方法避免了稳态滤波增益估计的复杂算法.

3) 新方法基于 ARMA 新息模型参数的在线辨识, 可一揽子得到噪声统计估计, 输出预报器, 白噪声估值器和状态估值器. 由于 ARMA 新息模型的 RELS 或 EKF 参数估计, 白噪声估值器和输出预报器都可递推计算, 因此自校正状态估值器可实时实现, 且可在统一框架下处理滤波、预报和平滑问题.

4) 新方法可应用于自校正雷达跟踪系统和信号反卷积. 这些结果将在另文报道.

5) 为了减少计算量, (5)至(8)式中的 n 可用可观性指数 μ 代替^[5], $\mu \leq n$.

参 考 文 献

- [1] Mendel, J. M.. Minimum-Variance Deconvolution. IEEE Trans. Geosci. and Remote Sensing, 1981, GE-19, 161—171
- [2] Kalman, R. E.. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Trans. ASME, Series D, J. Basic Eng. 1960, 82, 35—45
- [3] 邓自立, 郭一新. 现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制. 北京: 知识出版社, 1989
- [4] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Optimal Filtering. Prentice-Hall, Inc., 1979
- [5] 韩京清, 何关钰, 许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985
- [6] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.. Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day, San Francisco, 1976
- [7] Deng, Z. L.. White-Noise Filter and Smoother with Application to Seismic Data Deconvolution. Proc. of 7th IFAC/I-FORS Symp. on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, 1985, 621—625
- [8] Suwanchai, S. I. and Bullock, T. E.. Direct Estimation of Noise Covariances. ACC, 1988, 1289—1294
- [9] Panuska, V.. A New Form of the Extended Kalman Filter for Parameter Estimation in Linear Systems with Correlated Noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1980, AC-25, 229—235
- [10] Sage, A. P. and Husa, G. W.. Adaptive Filtering with Unknown Prior Statistics. Proc. JACC, 1969, 760—769
- [11] Mehra, R. K.. Approaches to Adaptive Filtering. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, AC-17, 693—698

A New Approach to Self-Tuning Kalman Filtering, Prediction, Deconvolution and Smoothing

DENG Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin, 150080, PRC)

ZHANG Huanshui

(Department of Mathematics, Tai'an Teachers' College, Shandong Tai'an, 271000, PRC)

Abstract: Using the modern time series analysis method, based on white noise estimators and output predictors, this

paper presents a new approach for solving the steady-state optimal and self-tuning Kalman filtering, prediction and smoothing problems of linear discrete time-invariant systems. The new approach can be applied to the tracking systems, signal processing and communication systems. A simulation example shows its usefulness.

Key words: steady-state optimal filtering; self-tuning filtering; deconvolution; smoothing; white noise estimators

本文作者简介

邓自立 1938年生, 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所教授, 研究兴趣为自校正, 自适应滤波, 信号处理, 现代时间序列分析, 过程控制。

张焕水 1964年生, 1984年毕业于泰安师专数学系, 1991年于黑龙江大学应用数学研究所获自动控制理论及其应用专业工学硕士学位, 研究兴趣为自校正信号处理, 自适应滤波, Kalman 滤波。

评 Ming Rao (饶明) Haiming Qiu (丘海明) 编著的 《Process Control Engineering (过程控制工程)》教材

由加拿大 Alberta 大学化工系智能工程实验室饶明与丘海明副教授编著的教材 (Process Control Engineering) 已于 1993 年由美国 Gordon and Breach Science publishers 出版, 这是目前国外最新出版的一本有关过程控制工程的教材。

过程控制工程是一门以过程工业为对象, 以控制理论为基础, 以自动化仪表以及计算机作为技术工具的涉及自动控制系统的分析、设计, 实施与运行的工程性较强的技术课程, 虽然, 目前在国内外已不乏这方面的优秀教材, 但是, 该教科书与其它相比, 又有一些新颖独到之处。

该书共分十二章。

第一章为绪论, 主要介绍控制系统的组成, 发展仿真与分类; 第二章则叙述数学模型, 拉氏变换, 传递函数与方块图等; 第三章详细讨论了时域分析与设计; 第四章则讨论了系统的稳定性与根轨迹法; 第五章叙述频域分析与设计; 第六章描述离散系统的分析与设计; 第七章概述了过程控制系统设计, 内容包括被控量与操纵量的选择, 变送器与传热器执行机构, 调节器的选择与整定等; 第八章为高级过程控制系统, 内容涉及串级控制、比值控制、前馈控制以及预测控制等其它高级控制系统; 第九、十、十一章为现代控制理论部分, 叙述了状态空间法分析与设计, 最优控制, 系统辨识与自适应控制; 最后一章 (十二章) 则介绍了智能过程控制, 作者认为它是下一代过程自动化, 该章介绍了智能控制的系统结构, 过程控制中的集成分散智能系统, 智能过程控制的前沿发展情况等。

纵观全书, 特别与国内、外同类教材相比, 本书有以下特点:

1) 所包含的内容比较广泛

在欧美国家, 过程控制课程主要为化工系的本科生而设, 因此内容往往只涉及一些以经典控制理论为基础的最基本的内容, 本书除了经典控制理论外 (第 1~6 章), 还介绍了现代控制理论的主要内容 (第 9~11 章) 与智能控制 (第 12 章)。因此, 该教材不仅适用于本科生而且还可作为研究生的教科书, 此外, 它的有关工业过程控制的内容不仅适用于化工系学生, 也可以作为机械工程系、电气工程的过程控制教材;

2) 内容新颖

本书特设一章叙述有关智能控制的基本知识与展望, 这是目前国内外过程控制教材中暂时没有涉及到的内容;

(下转第 167 页)