第 11 卷第 2 期
1994 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 2
Apr., 1994

系统解耦的传递函数条件*

陈树中

(华东师范大学数学系·上海, 200062)

摘要: 对于有 p 个输出, $p+1$ 个输入的线性时不变系统, 本文给出了利用静态状态反馈可以解耦的传递函数条件.

关键词: 解耦; 静态状态反馈; 无穷零点

1 引　言

考虑线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

其中　$x \in \mathrm{R}^n$,　$y \in \mathrm{R}^p$,　$u \in \mathrm{R}^m$,　$m = p+1$,　$\mathrm{rank}C = p$,　$\mathrm{rank}B = m$.

解耦问题是寻找静态状态反馈 $u=Kx+Hv$, 使闭环传递函数成为非奇异对角形. 若 H 是满秩方阵, (K,H) 称为正则静态状态反馈, 否则称为非正则静态状态反馈. 当 $m=p$ 时, 问题已完全解决[1,2], 对 $m>p$, 出现多次错误结论, 仍未获得解答.

记(1)的传递函数矩阵为 $G(s)$, 第 i 行为 $G_i(s)$. $G_i(s)$ 的无穷零点阶为 n_i, 则

$$\lim_{s\to\infty} s^j G_i(s) = 0, \quad j < n_i, \quad G_i = \lim_{s\to\infty} s^{n_i} G_i(s) \neq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant p. \tag{2}$$

对闭环系统, 相应的矩阵和量上加符号"—", 如 $\bar{G}(s)$, $\bar{n}_i$ 等等, 直接计算知

$$\bar{G}(s) = G(s)U(s)H, \quad U(s) = [I - K(sI - A)^{-1}B]^{-1}. \tag{3}$$

命题 1[1]　方可逆系统 (C,A,B) 可以解耦的充要条件是矩阵

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_p \end{bmatrix}$$

非奇异.

引理 1[3]　若 $G_iH \neq 0$, 则 $n_i = \bar{n}_i$, $\bar{G}_i = G_iH$. 若 $G_iH = 0$, 则 $\bar{n}_i > n_i$.

引理 2[3]　(K,H) 是正则静态状态反馈, 则系统 (C,A,B) 可以解耦的充要条件是系统 $(C, A+BK, BH)$ 可以解耦.

引理 3[3]　设 $\mathrm{rank}G = d < p$, 则系统(1)可以解耦的必要条件是 G 中有 $d-1$ 个行是基本行, 其余各行仅差一个倍数.

引理 4[3]　若 (K,H) 使闭环可以解耦, K, H 的第 i 行分别为 k_i, h_i, $G_d = e_d$, $G_i = \alpha_i G_d$, $d \leqslant i \leqslant p$, e_d 是单位向量.

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1992年5月16日收到. 1993年6月29日收到修改稿.

$$K_0=\begin{bmatrix}0\\k_d\\0\end{bmatrix},\quad H_0=\begin{bmatrix}I_{d-1}&0\\0&0\\0&I_{m-d}\end{bmatrix}$$

其中 k_d 在 K_0 的第 d 行，K_0,H_0 与 K,H 有相同维数，则

1) $h_d=0$;

2) (K_0,H_0) 使闭环可以解耦.

2 主要结果

若 $\mathrm{rank}G=p$，则存在 H 使 GH 是满秩方阵，按引理 1 和命题 1，反馈律 $(0,H)$ 使闭环可以解耦，以下排除这一平凡情形. 由引理 2，不妨设

$$G_d=e_d,\quad G_i=\alpha_iG_d,\quad d\leqslant i\leqslant p. \tag{4}$$

让 $\widetilde{G}(s)$ 是 $G(s)$ 删除第 d 列后的矩阵，第 i 行为 $\widetilde{G}_i(s)$，$\widetilde{G}_i(s)$ 的无穷零点阶为 n_i+l_i

$$\widetilde{G}_i=\lim_{s\to\infty}s^{n_i+l_i}\widetilde{G}_i(s),\quad 1\leqslant i\leqslant p.$$

若系统(1)可以解耦，由引理 3 和 4，$l_i=0$，$1\leqslant i\leqslant d-1$，对于 $i\geqslant d$，若 $\widetilde{G}_i(s)\not\equiv0$，则 $l_i>0$，若 $\widetilde{G}_i(s)\equiv0$，则 $l_i=\infty$. 通过行交换，不失一般性可以假定

$$l_d\leqslant\cdots\leqslant l_{t-1}<l_t=\cdots=l_p,\quad t<p, \tag{5}$$

或

$$l_d\leqslant\cdots\leqslant l_{t-1}<l_t=\cdots=l_{p-1}<l_p. \tag{6}$$

记输入到状态的传递函数矩阵为 $T(s)$

$$T(s)=(sI-A)^{-1}B=\sum_{i=1}^{\infty}T_iS^{-i},\quad T_i=[T_{i1}\ T_{i2}\ T_{i3}].$$

其中
$$T_{i1}\in\mathbf{R}^{n\times(d-1)},\quad T_{i2}\in\mathbf{R}^{n\times1},\quad T_{i3}\in\mathbf{R}^{n\times(m-d)}$$

定理 1 设 $\mathrm{rank}G=d<p$，系统(1)可以解耦的充要条件是下面条件满足.

1) G 中有 $d-1$ 行是基本行.

2) 让 G 中 $G_i(1\leqslant i\leqslant d-1)$ 是基本行，$G_d=e_d$，则下面两者之一成立.

i) 矩阵

$$\widetilde{G}=\begin{bmatrix}\widetilde{G}_1\\\vdots\\\widetilde{G}_p\end{bmatrix}$$

是满秩方阵.

ii) 存在整数 m，非零向量 k 使下面条件满足.

a) $l_{p-1}\leqslant m\leqslant l_p$(当 $l_p=\infty$ 时，$l_{p-1}\leqslant m<l_p$)

$$k(T_{11},T_{13},\cdots,T_{m-1,1},T_{m-1,3})=0.$$

b)
$$\overline{D}=\begin{bmatrix}\widetilde{G}_1\\\vdots\\\widetilde{G}_{t-1}\\\widetilde{G}_t+\alpha_tk(T_{m1},T_{m3})\gamma\\\vdots\\\widetilde{G}_{p-1}+\alpha_{p-1}k(T_{m1},T_{m3})\gamma\\\beta\widetilde{G}_p+\alpha_pk(T_{m1},T_{m3})\end{bmatrix}$$

是满秩方阵，其中 $\beta=1$，若 $m=l_p$，$\beta=0$，若 $m<l_p$. $\gamma=1$，若(5)成立或(6)成立且 $m=l_{p-1}$，$\gamma=0$，若(6)成立且 $l_{p-1}<m\leqslant l_p$.

证　必要性：1)即引理 3. 让 (K,H) 是使闭环可以解耦的反馈，由引理 4，(K_0,H_0) 使闭环可以解耦. 记

$$[v_1(s)\ v_2(s)\ v_3(s)]=k_d(sI-A)^{-1}B. \tag{7}$$

其中 $v_2(s)$ 是有理函数. $v_1(s)$，$v_3(s)$ 分别是 $d-1$ 和 $m-d$ 维有理函数向量. (3)式中 $U(s)$ 用 K_0 代入，第 d 行为

$$[w_1(s)\ w_2(s)\ w_3(s)]=[v_1(s)/(1-v_2(s))\ 1/(1-v_2(s))\ v_3(s)/(1-v_2(s))].$$

让 m 是 $[w_1(s)\ w_3(s)]$ 的无穷零点阶，则

$$[\overline{w}_1\ \overline{w}_3]=\lim_{s\to\infty}s^m[w_1(s)\ w_3(s)]=\lim_{s\to\infty}s^m[v_1(s)\ v_3(s)]\neq 0. \tag{8}$$

m 必定满足定理条件. 因为由(3)，相应于 (K_0,H_0) 的闭环传递函数矩阵是

$$\overline{G}(s)=\widetilde{G}(s)+\begin{bmatrix}g_{1d}(s)\\ \vdots\\ g_{pd}(s)\end{bmatrix}[w_1(s)\ w_3(s)].$$

其中 $g_{ij}(s)$ 是 $G(s)$ 的第 (i,j) 个元素，下面计算 $\overline{G}_i$.

$$\overline{G}_i(s)=\widetilde{G}_i(s)+g_{id}(s)[w_1(s)\ w_3(s)].$$

对于 $i\leqslant d-1$，

$$\lim_{s\to\infty}s^{n_i}\overline{G}_i(s)=\lim_{s\to\infty}s^{n_i}\widetilde{G}_i(s).$$

因此

$$\overline{G}_i=\widetilde{G}_i,\quad 1\leqslant i\leqslant d-1.$$

对于 $d\leqslant i\leqslant p$，若 $m>l_p$，同样可得 $\overline{G}_i=\widetilde{G}_i$，从而 $\overline{D}=\widetilde{G}$，即 2)i)成立. 若 $m<l_{p-1}$，无论(5)或(6)成立，均有 $m<l_t$. 对于 $i\geqslant t$

$$\overline{G}_i=\lim_{s\to\infty}s^{n_i+m}[\widetilde{G}_i(s)+g_{id}(s)[w_1(s)\ w_3(s)]]=\alpha_i[\overline{w}_1\ \overline{w}_3].$$

因此在闭环系统中 $\{\overline{G}_i,t\leqslant i\leqslant p\}$ 是相关向量组. 和 (K_0,H_0) 使闭环可以解耦矛盾. 由(7)(8)知，m 和 k_d 满足定理条件 2)ii)a). 下面计算 $\overline{D}$.

若(5)成立，则 $l_p<\infty$，否则 $\overline{G}_t\cdots\overline{G}_p$ 相关，从而 $m=l_p$，对于 $i<t$，因为 $l_i<m$，因此

$$\overline{G}_i=\widetilde{G}_i,\quad 1\leqslant i\leqslant t-1. \tag{9}$$

对于 $i\geqslant t$，因为 $l_i=m$，由(8)和 $T(s)$ 的表达式得

$$\overline{G}_i=\widetilde{G}_i+\alpha_ik_d[T_{m1}\ T_{m3}],\quad t\leqslant i\leqslant p. \tag{10}$$

(9)，(10)表明 $\overline{D}$ 有定理中的形式，其中 $\beta=\gamma=1$.

若(6)成立且 $m=l_{p-1}$，由 $m<l_p$ 知

$$\overline{G}_p=\alpha_p[\overline{w}_1\ \overline{w}_3]=\alpha_pk_d[T_{m1}\ T_{m3}],$$

其它的 $\overline{G}_i$ 同(9)，(10)，即 $\overline{D}$ 中 $\beta=0$.

若(6)成立且 $l_{p-1}<m\leqslant l_p$，同样可得 $\overline{G}_i=\widetilde{G}_i$，若 $1\leqslant i\leqslant p-1$，$\overline{G}_p=\alpha_pk_d[T_{m1}\ T_{m3}]$，若 $m<l_p$ 或 $\overline{G}_p=\widetilde{G}_p+\alpha_pk_d[T_{m1}\ T_{m3}]$，若 $m=l_p$，因此 b)必须满足.

充分性：由必要性的论证知，可以找到 k_d，或等价地 (K_0,H_0) 使闭环系统可以解耦.

参　考　文　献

[1] Falb, P. L. and Wolovich, W. A.. Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE

Trans. Automat. Contr., 1967, AC-12:651—669
[2] Wonham, W. M. and Morse, A. S.. Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach, SIAM. J. Control, 1970, 8:1—18
[3] 陈树中. Morgan 问题:输入数=输出数+1 情形. 自动化学报,1993,19(5):520—526

The Transfer Function Condition for System Decoupling

CHEN Shuzhong

(Department of Mathematics, East China Normal University · Shanghai, 200062, PRC)

Abstract: In this paper a transfer function condition of decoupling by static state feedback for linear time-invariant system with p outputs and $p+1$ inputs is given.

Key words: decoupling; static state feedback; infinity zero

本文作者简介

陈树中 1943 年生. 副教授. 1965 年毕业于南京大学数学系, 1981 年在华东师范大学获硕士学位, 以后留校任教. 目前兴趣为系统解耦理论和非线性控制.

(上接第 202 页)

Title	1995	Place	Deadline	Further Information
IFAC Conference Intelligent Autonomous Vehicles	June 12—14	Espoo Finland	30 Sept. 1994	Finnish Society of Automation Asemapäällikönkatu 12 C SF-00520 Helsinki Finland FAX +358/0/1461 650
1995 American Control Conference (in cooperation with IFAC)	June 21—23	Seattle, WA USA	15 Sept. 1994	Prof. M. Tomizuka, Dept. of M. E. University of California Berkeley, CA 94720, USA FAX 510/642 6163 e-mail: tomizuka@euler. berkeley. edu
IFAC Conference System Structure and Control	July 5—7	Nantes France	1 Aug 1994	Mr. J. J. Loiseau, CNRS LAN-ECN 1, rue de la Noe F-44072 Nantes Cedex 03 France FAX +33/40/372522 e-mail: loiseau@lan01. ensm-nantes. fr
IFAC Symposium (7th) Large Scale Systems: Theory and Applications	July 11—13	London UK	15 Sept. 1994	Prof. P. D. Roberts Control Engineering Research Centre City University Northampton Square London EC1V 0HB, UK FAX +44/71/477 8568