第 11 卷第 2 期
1994 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 2
Apr., 1994

区间多项式 Schur 稳定的一个结果

肖淑贤
(华中理工大学数学系·武汉，430074)

摘要：本文证明了 n 次区间多项式 Schur 稳定的充分条件是 2^n 个多项式皆 Schur 稳定. 并进一步给出了一种能逼近区间多项式 Schur 稳定充要条件的判别方法.

关键词：区间多项式；Schur 稳定性；多次剖分法；替换向量

考虑 n 次多项式

$$P_n(z,v) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n, \tag{1}$$

$$v = \mathrm{col}(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n),$$

$$D \triangleq \{v \mid \alpha_i \leqslant a_i \leqslant \beta_i,\ i = 1,2,\cdots,n\}, \quad \alpha_i \leqslant \beta_i, \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

是事先给定的 $2n$ 个实数.

区间多项式的 Schur 稳定性定义参见文[1,4]. 多项式(1)是 Schur 稳定的，简称为 $P_n(z,v)$ 是 S 稳定的，记为 $P_n(z,v) \in \mathscr{S}$.

以下引理出自文[1].

引理 1 若(1)是 S 稳定的，则速矢端线 $P_n(e^{i\omega},v)$ 的幅角连续分枝关于 ω 严格单调递增.

记纯量 ω 的增量为 $\Delta\omega$，而 $\mathrm{Arg}P_n(e^{i\omega},v)$ 的相应增量记为

$$\Delta^* = \Delta \mathrm{Arg}P_n(e^{i\omega},v).$$

引理 2 若 $P_n(z,v) \in \mathscr{S}$，则 $\Delta^* > \frac{n}{2}\Delta\omega(\Delta\omega > 0)$.

证 由于 $P_n(z,v)$ 是 S 稳定的，那么它的零点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 皆在单位圆内，$P_n(z,v) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$，$\mathrm{Arg}P_n(e^{i\omega},v) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{Arg}(e^{i\omega}-z_j)$，$\Delta^* = \Delta\mathrm{Arg}P_n(e^{i\omega},v) = \sum_{j=1}^{n}\Delta\mathrm{Arg}(e^{i\omega}-z_j)$.

又由于 $\Delta\mathrm{Arg}(e^{i\omega}-z_j)$ 大于 $\Delta\omega$ 所对应的圆周角，故 $\Delta^* > \frac{n}{2}\Delta\omega$. 证毕.

考虑区间多项式

$$Q_n(z,v) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n + \sum_{i=1}^{r} a_i, \quad n/2 \leqslant r \leqslant n,$$

$$d \triangleq \{v = \mathrm{col}(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n) \mid \alpha_i \leqslant a_i \leqslant \beta_i, i = 1,2,\cdots,n\},$$

$$d^\circ \triangleq \{v = \mathrm{col}(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n) \mid a_i = \alpha_i(\text{或 } \beta_i), i = 1,2,\cdots,n\}.$$

下面是本文的主要结果.

定理 1 $Q_n(z,v) \in \mathscr{S},\quad \forall\ v \in d \Leftrightarrow Q_n(z,v) \in \mathscr{S},\quad \forall\ v \in d^\circ$.

证 令

本文于1992年12月23日收到. 1993年5月3日收到修改稿.

$v_j = \mathrm{col}(a_1 \cdots a_{j-1}\ \alpha_j\ a_{j+1} \cdots a_n)$, $\tilde{v}_j = \mathrm{col}(a_1 \cdots a_{j-1}\ \beta_j\ a_{j+1} \cdots a_n)$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

"$\Leftarrow$"

设 $Q_n(z, v_j) \in \mathscr{S}$, $Q_n(z, \tilde{v}_j) \in \mathscr{S}$, 下证 $Q_n(z, v) \in \mathscr{S}$. v 的替换向量[1,2]为 v_j 和 $\tilde{v}_j$. 记

$$A(\omega) = Q_n(e^{i\omega}, v_j), \quad B(\omega) = Q_n(e^{i\omega}, \tilde{v}_j); \quad \eta = a_j - \alpha_j, \ \bar{\eta} = \beta_j - a_j.$$

以下分两种情况讨论.

i) 设 $r < j \leqslant n$.

当 ω 的增量为 $\Delta\omega$ 时, 由引理 2 知 $\Delta \mathrm{Arg} A(\omega) > \frac{n}{2}\Delta\omega$, $\Delta \mathrm{Arg} B(\omega) > \frac{n}{2}\Delta\omega$.

另一方面此时, $\overrightarrow{AB} = \bar{\eta} e^{i\omega(n-j)}$, $\Delta \mathrm{Arg}\ \overrightarrow{AB} = (n-j)\Delta\omega$, 因此有

$$\Delta \mathrm{Arg} A(\omega) > \frac{n}{2}\Delta\omega = \frac{n}{2(n-j)}\Delta \mathrm{Arg}\ \overrightarrow{AB} \geqslant \Delta \mathrm{Arg}\ \overrightarrow{AB}, \tag{3}$$

和

$$\Delta \mathrm{Arg} B(\omega) > \frac{n}{2}\Delta\omega = \frac{n}{2(n-j)}\Delta \mathrm{Arg}\ \overrightarrow{AB} \geqslant \Delta \mathrm{Arg}\ \overrightarrow{AB}. \tag{4}$$

假设 $Q_n(z, v) = Q_n(z, v_j) + \eta z^{n-j}$ 不是 S 稳定的. 由于 $Q_n(z, v) \in \mathscr{S}$, 又由于多项式零点随参数连续变化, 因此$\exists\ \eta' > 0$, 且 $\eta' \leqslant \eta$ 使得 $Q_n(z, v^\circ) = Q_n(z, v) + \eta' z^{n-j}$ 有零点 $e^{i\omega_0}$, 这表明当 $\omega = \omega_0$ 时, 动线段$\overline{AB}$通过原点, 且 $A(\omega_0)$, $B(\omega_0)$ 处于原点各一侧.

根据引理 1, 当 $\omega > \omega_0$ 时, A, B 两点绕原点反时针转动, 当 $\Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_0 > 0$ 且充分小时, 通过 $A(\omega_1) = A'$, $B(\omega_1) = B'$ 的直线与通过 $A(\omega_0) = A$, $B(\omega_0) = B$ 的直线必相交, 设交点为 O'(图 1), 相应于 $\Delta\omega_0$ 的动线段转角增量为 $\Delta \mathrm{Arg} \overrightarrow{AB} = \angle BO'B$, 而 $\Delta \mathrm{Arg} A(\omega_0) = \angle AOA'$, $\Delta \mathrm{Arg} B(\omega_0) = \angle BOB'$, 不难发现, 不管交点 O' 处于何一位置, 不等式(3)与不等式(4). 必有一个不能成立. 这个矛盾就证明了 $Q_n(z, v)$ 必 S 稳定.

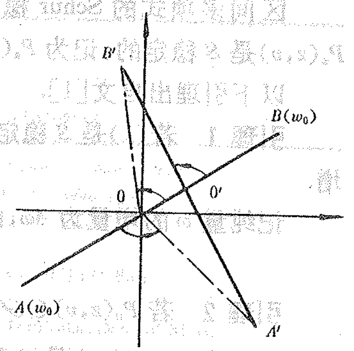

图 1 转角增量示意图

ii) $1 \leqslant j \leqslant r$.

当 ω 的增量为 $\Delta\omega$ 时, 易知仍有 $\Delta \mathrm{Arg} A(\omega) > \frac{n}{2}\Delta\omega$, $\Delta \mathrm{Arg} B(\omega) > \frac{n}{2}\Delta\omega$, 但 $\Delta \mathrm{Arg}\ \overrightarrow{AB} = \Delta \mathrm{Arg}[e^{i\omega(n-j)} + 1]$.

用反证法. 设 $Q_n(z, v) \notin \mathscr{S}$, 即 $Q_n(z, v) = Q_n(z, v_j) + \eta(z^{n-j} + 1)$ 不是 S 稳定的.

根据 i) 中所阐述的理由, 必$\exists\ \eta'$, $0 < \eta' \leqslant \eta$, 使得 $Q_n(z, v^\circ) = Q_n(z, v_j) + \eta'(z^{n-j} + 1)$ 有零点 $e^{i\omega_0}$. 这表明当 $\omega = \omega_0$ 时, 动线段 $\overline{AB}$ 通过原点, 且 $A(\omega_0)$, $B(\omega_0)$ 各居于原点的两侧, 此时

$$Q_n(e^{i\omega_0}, v_j) + \eta'[e^{i\omega_0(n-j)} + 1] = 0.$$

若 $e^{i\omega_0(n-j)} + 1 = 0$, 则 $Q_n(e^{i\omega_0}, v_j) = 0$, 这与 $Q_n(z, v_j) \in \mathscr{S}$ 的假定相矛盾. 因此 $e^{i\omega_0(n-j)} + 1 \neq 0$.

设 $e^{i\omega_0(n-j)}$ 位于实轴上方(包括在右半实轴上), 则当 $\Delta\omega > 0$ 足够小时, $e^{i(\Delta\omega+\omega)(n-j)} + 1$, 仍位于实轴上方. 这时

$$\mathrm{Arg}[e^{i\omega(n-j)} + 1] = \frac{1}{2}\mathrm{arg} e^{i\omega(n-j)} + 2k\pi,$$

$$\operatorname{Arg}[e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}+1]=\frac{1}{2}\arg e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}+2k\pi,$$

从而
$$\Delta\operatorname{Arg}\overrightarrow{AB}=\Delta\operatorname{Arg}[e^{i\omega(n-j)}+1]=\frac{n-j}{2}\Delta\omega\text{(见图 2)}.$$

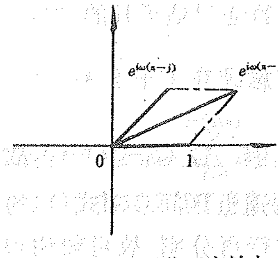

图 2　$e^{i\omega(n-j)}$位于实轴上方

设 $e^{i\omega(n-j)}$位于实轴下方. 那么当 $\Delta\omega>0$ 足够小时，$e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}+1$，仍位于实轴下方. 这时有

$$\operatorname{Arg}[e^{i\omega(n-j)}+1]=\operatorname{Arg}e^{i\omega(n-j)}-\frac{1}{2}\arg e^{i\omega(n-j)},\text{(见图 3)}$$

$$\operatorname{Arg}[e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}+1]=\operatorname{Arg}e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}-\frac{1}{2}\arg e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}.$$

从而当 $\Delta\omega>0$，且充分小时有

$$\begin{aligned}\Delta\operatorname{Arg}\overrightarrow{AB}&=\Delta\operatorname{Arg}[e^{i\omega(n-j)}+1]\\&=\operatorname{Arg}e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}-\operatorname{Arg}e^{i\omega(n-j)}\\&\quad-\frac{1}{2}[\arg e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}-\arg e^{i\omega(n-j)}]\\&=(n-j)\Delta\omega-\frac{n-j}{2}\Delta\omega\\&=\frac{n-j}{2}\Delta\omega.\end{aligned}$$

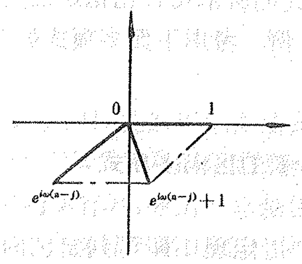

图 3　$e^{i(\omega+\Delta\omega)(n-j)}+1$ 位于实轴下方

因此无论 $e^{i\omega(n-j)}+1\neq 0$ 位于何处皆有

$$\Delta\operatorname{Arg}A(\omega)>\frac{n}{2}\Delta\omega\geqslant\Delta\operatorname{Arg}\overrightarrow{AB}\tag{5}$$

和
$$\Delta\operatorname{Arg}B(\omega)>\frac{n}{2}\Delta\omega\geqslant\Delta\operatorname{Arg}\overrightarrow{AB}.\tag{6}$$

往下的论证完全如同在 i)部分的论述，最后可由不等式(5)和(6)得出矛盾. 因此反证法假设不真，故 $Q_n(z,v)\in\mathscr{S}$.

由文[2]的引理 1，“$\Leftarrow$”得证.

“$\Rightarrow$”

显然.　　证毕.

设

$$\tilde{Q}_n(z,v)=z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_{n-1}z+b_n+\sum_{i=1}^{[n/2]+1}b_i,$$

$$U=\operatorname{col}(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n)\in\tilde{d},$$

$$\tilde{d}^{\circ}=\{U\,|\,b_i=\alpha_i,(\text{或 }\beta_i),\ i=1,2,\cdots,n-1;\ b_n=k_1(\text{或 }k_2);$$
$$k_1=\alpha_n-\sum_{i=1}^{[n/2]+1}\beta_i,\ k_2=\beta_n-\sum_{i=1}^{[n/2]+1}\alpha_i\},$$

$$\tilde{d}=\{U\,|\,\alpha_i\leqslant b_i\leqslant\beta_i),\ i=1,2,\cdots,n-1,\ k_1\leqslant b_n\leqslant k_2\}.$$

定理 2　$\tilde{Q}_n(z,v)\in\mathscr{S},\quad\forall\,U\in\tilde{d}^{\circ}\Rightarrow P_n(z,v)\in\mathscr{S},\quad\forall\,v\in D.$

证　任取 $v\in D$. 令 $v'=\operatorname{col}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 其中 $b_i=a_i,i=1,2,\cdots,n-1,b_n=a_n-\sum_{i=1}^{[n/2]+1}a_i$. 于是 $k_1\leqslant b_n\leqslant k_2$，从而 $v'\in\tilde{d}$. 由定理 1 和本定理的条件知，区间多项式 $\tilde{Q}_n(z,U)$，$\forall\,U\in$

$\tilde{d}^{\circ}$，皆 S 稳定，从而 $\tilde{Q}_n(z,v')\in\mathscr{S}$. 而 $P_n(z,v)=\tilde{Q}_n(z,v')$，这就证明了 $P_n(z,v)\in\mathscr{S},\forall\ v\in D$. 证毕.

引理 3 设 $D=\bigcup_{i=1}^{\mu}D_i$. $P_n(z,v)\in\mathscr{S},\forall\ v\in D\Leftrightarrow P_n(z,v)\in\mathscr{S},\forall\ v\in D_i,\forall\ i=1,2\cdots,\mu$. 它的证明是平凡的. 略.

注意到在 $\tilde{d}^{\circ}$ 中有 $k_2-k_1=\beta_n-\alpha_n+\sum_{i=1}^{[n/2]+1}(\beta_i-\alpha_i)$，而当 $\beta_i-\alpha_i\to 0,\forall\ i=1,2,\cdots,[n/2]+1$ 时，有 $\sum_{i=1}^{[n/2]+1}(\beta_i-\alpha_i)\to 0$，故可以利用文[3]提供的多次剖分法，并借助本文引理 3 和定理 2，去逼近区间多项式(1)的 S 稳定的充要条件. 同时这种多次剖分法，只取不能判稳的子块施行再分割，故可较快得到结论. 定理 2 的优点是确定 k_1 和 k_2 的方法十分简单，故比文[3]所采用转化稳定性类型的方法会更方便.

例 考虑下面多项式的 Schur 稳定性

$$z^4+az^3+b, \tag{7}$$

$$D:a\in[1,\ 2],\quad b\in[4,\ 7].$$

作一新的区间多项式，

$$z^4+az^3+\tilde{b}+a, \tag{8}$$

$$\tilde{d}:a\in[1,\ 2],\quad \tilde{b}\in[2,\ 6].$$

用定理 1 即可判定区间多项式(8)是 S 稳定的，根据定理 2 区间多项式(7)亦 S 稳定.

参 考 文 献

[1] 肖淑贤. 复区间多项式的稳定性. 数学物理学报，1992，(增刊)：45—46

[2] 肖淑贤. 关于多项式零点皆位于开半平面内的一个结果. 全国第四次稳定性会议论文集. 北京：科学出版社，1992，119—120

[3] 肖淑贤. 线性控制系统鲁棒稳定性的多次剖分法. 华中理工大学学报，1992，20(3)：151—156

[4] Ackermann, J. E. and Barmish, B. R.. Robust Schur Stability of a Polytope of Polynomials. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33(10):984—986

A Result on Schur Stability of Interval Polynomial

XIAO Shuxian

(Department of Mathematics, Huazhong University of Science Technology • Wuhan, 430074, PRC)

Abstract: In this paper, it is proved that sufficient condition of Schur stability of the interval polynomial of order n-th is that 2^n polynomials are all Schur stability. Furthermore, a method approximating NS condition of Schur stability of interval polynomial is given.

Key words: interval polynomial; Schur stability; multi-cutting method; substituting vector

本文作者简介

肖淑贤 1947 年生. 讲师. 1982 年在华中理工大学获理学硕士学位. 现在华中理工大学数学系任教. 专业研究方向为微分方程稳定性理论.