

摄动双积分系统的时间-燃料次优反馈控制

荆武兴 崔平远 杨 涤 吴瑶华

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 150006)

摘要: 本文研究了摄动双积分系统的时间-燃料最优控制问题。用理想双积分系统时间-燃料最优切换线的改进形式, 构造了摄动双积分系统的反馈控制律, 证明了闭环系统的鲁棒收敛性。算例表明, 反馈控制律与最优控制律具有相近的控制结果。

关键词: 双积分系统; 时间-燃料最优控制; 鲁棒控制; 开关控制

1 引言

理想双积分系统的时间-燃料最优控制综合, 理论上已经解决^[1,3], 但在实践中存在不足: 由于实际系统存在干扰因素, 而且模型简化过程中, 忽略了系统固有的线性或非线性的因素, 用样本数据进行反馈控制^[4], 理想的时间-燃料最优控制律容易造成系统沿开关线的颤振^[5], 在许多情况下, 这对系统是极其有害的。

为了克服上述不足, 本文将理想时间-燃料最优控制切换线进行改进, 构造了摄动双积分系统的无颤振反馈控制律, 证明了闭环系统的鲁棒收敛性。仿真例子表明, 反馈控制律与最优开环控制律具有相近的控制效果。

2 控制问题的描述

考虑如下微分方程描述的摄动双积分控制系统

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, t) + au. \quad (1)$$

u 为开关控制函数, 其值域为 $\{-1, 0, 1\}$, a 为常数 (一般与执行机构的功率有关), $g(x, \dot{x}, t)$ 于 R^3 上连续, 并且存在常数 α 使

$$\left| \frac{g(x, \dot{x}, t)}{a} \right| < \alpha < \frac{1}{2}. \quad (2)$$

如果摄动加速度 $g(x, \dot{x}, t)/a$ 的上确界小于 $1/2$, 常数 α 是存在的。令

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad x_2 = \frac{\dot{x}}{a}, \quad f(x_1, x_2, t) = \frac{g(x, \dot{x}, t)}{a}.$$

(1) 式可以表示为状态方程的形式

$$\dot{X} = F(X, t) + Bu. \quad (3)$$

其中 $X = [x_1, x_2]^T$, $F(X, t) = [x_2, f(x_1, x_2, t)]^T$, $B = [0, 1]^T$ 。

控制问题为: 设计反馈控制律 $u=u(X)$, 使系统 (3) 从任意非零初始状态 $X(t_0)$ 转移至原点, 并使时间-燃料指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (\rho + |u|) dt, \quad (\rho > 0) \quad (4)$$

极小. ρ 为时间加权因子.

3 控制律设计

3.1 最优控制

系统(3)的哈密顿函数为

$$H = \rho + |u| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (f + u).$$

其中 λ_1, λ_2 为协状态变量.

根据极大值原理, 最优控制应使 H 极小. 经过综合, 得到最优控制律如下

$$u = \begin{cases} 0, & |\lambda_2| < 1, \\ -\operatorname{sgn}[\lambda_2], & |\lambda_2| > 1, \\ [0, 1] \text{ 中取值}, & \lambda_2 = -1, \\ [-1, 0] \text{ 中取值}, & \lambda_2 = 1. \end{cases} \quad (5)$$

λ_1, λ_2 由下面的协态方程确定

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad (6a)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad (6b)$$

状态方程(3)与协状态方程(6)构成一个两点边值问题, 用(5)作控制律必须解此两点边值问题, 这是相当费时的, 因此达不到在线控制的目的.

3.2 反馈控制

为了得到反馈控制律, 暂且不考虑摄动项 f 的影响, (3)可简化为理想的双积分系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (7)$$

在指标(4)极小的要求下, (7)的反馈控制律为^[3]

$$u = -\operatorname{sgn}[\operatorname{sgn} S_1 + \operatorname{sgn} S_2]. \quad (8)$$

其中

$$S_1 = x_1 + \frac{4 + \rho}{2\rho} x_2 |x_2|, \quad (\text{关函数}),$$

$$S_2 = x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2|. \quad (\text{开函数}),$$

$S_1=0$ 为关闭线, $S_2=0$ 为开启线.

用样本数据进行反馈控制, 控制律(8)易使摄动系统(3)产生颤振现象(图 1a), 或造成较大的性能指标损失(图 1b). 之所以出现上述情况, 是因为反馈控制律(8)中没有考虑摄动信息.

在控制律(8)的开关函数中加入摄动补偿, 并设置开关保持功能, 可以克服上述缺陷. 改进的控制律为

$$u(t) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}[\operatorname{sgn} \tilde{S}_1 + \operatorname{sgn} \tilde{S}_2], & (\tilde{S} > 0), \\ 0, & (\tilde{S}_1 = 0), \\ -\operatorname{sgn}[x_2], & (\tilde{S}_2 = 0), \\ u(t_{\text{sup}}), & (\tilde{S} < 0). \end{cases} \quad (9)$$

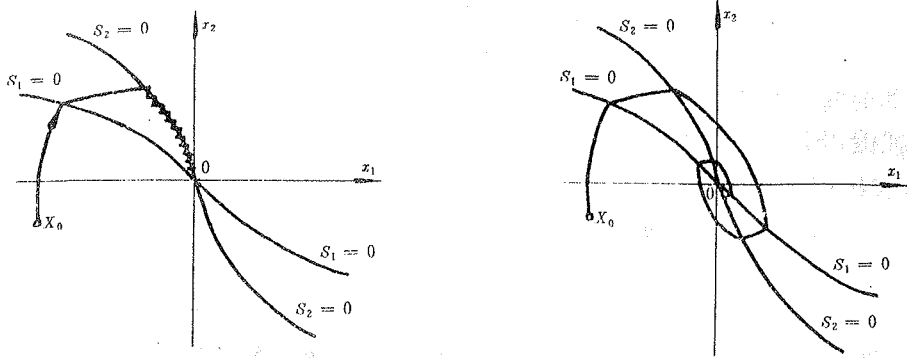


图1 理想时间-燃料最优反馈控制律作用下的振动系统相轨迹示意图

其中

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 \tilde{S}_2,$$

$$\tilde{S}_1 = x_1 + \frac{4 + (\rho + \varepsilon)}{2(\rho + \varepsilon)} x_2 |x_2|, \quad (\text{关函数}) \quad (10)$$

$$\tilde{S}_2 = x_1 + \frac{1}{2(1 - \alpha)} x_2 |x_2|, \quad (\text{开函数}) \quad (11)$$

$$u(t_0) = -\text{sgn}[\text{sgn}\tilde{S}_1(t_0) + \text{sgn}\tilde{S}_2(t_0)],$$

$$t_{\text{sup}} = \sup_{t' < t} \{t_0, t' | \tilde{S}(t') = 0\},$$

$$\frac{4\alpha}{1 - \alpha} - \rho < \varepsilon < \frac{4(1 - \alpha)}{\alpha} - \rho. \quad (12)$$

ε 为性能指标的损失补偿参数, α 为消振参数, 其取值范围由不等式(2)确定, t_{sup} 为过去最近一次切换时刻.

控制律(9)需要状态的信息和过去最近切换时刻的切换结果. 在此控制律作用下, 系统(3)的颤振现象将明显减弱(图2). 如果控制精度要求较高, 在原点附近, 控制切换仍较频繁, 这时可以用我国学者钱学森等提出的“双模控制”方法进一步消除^[6].

4 闭环系统状态收敛性分析

不妨设系统(3)的初始状态 $X(t_0)$ 在图2所示的位置上. 根据控制律(9), $u=1$, 系统(3)为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (13a)$$

$$\dot{x}_2 = 1 + f(x_1, x_2, t). \quad (13b)$$

方程(13)在 $[t_0, \infty)$ 上存在唯一连续解 $X(t)$. 由条件(2),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \infty.$$

状态轨线最终进入第一象限, 因此必与 $\tilde{S}=0$ 相交. 记 t_1 为状态轨线首次到达 $\tilde{S}=0$ 的时刻, 此时的状态为 $X(t_1)$. 如果 $X(t_1)=0$, 则控制过程结束; 如果 $X(t_1) \neq 0$, $X(t_1)$ 或在第二象限的 $\tilde{S}_1=0$ 上, 或在第四象限的 $\tilde{S}_2=0$ 上. 不妨设为前者. 根据控制律(9), 控制切换为 $u=0$, 系统(3)为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (14a)$$

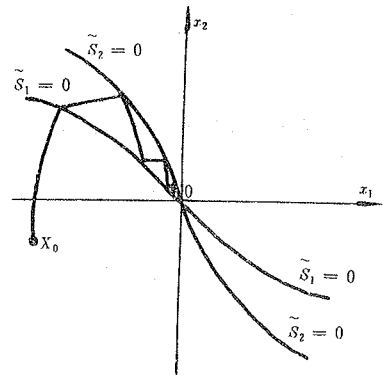


图2 改进时间-燃料最优反馈控制律作用下的振动系统相轨迹示意图

$$\dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t). \quad (14b)$$

以 $X(t_1)$ 为初值, (14) 在 $[t_1, \infty)$ 上存在唯一连续解, 不妨仍记为 $X(t)$. 记

$$T = \inf_{t \in [t_1, \infty)} \{t | x_2(t) = 0\}.$$

如果 $x_2(t) > 0 (t \in [t_1, \infty))$, 补充 $T = \infty$.

在 $[t_1, T)$ 上, $x_2(t) > 0$. 由 (10), (11), (12), (14)

$$\dot{x}_1(t) > 0, \quad \dot{\tilde{S}}_1(t) > 0, \quad \dot{\tilde{S}}_2(t) > 0.$$

$x_1(t), \tilde{S}_1(t), \tilde{S}_2(t)$ 为严格增加的连续函数, 在 T 点均有左极限,

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T^-} x_1(t) = x_{1T}, \\ \lim_{t \rightarrow T^-} \tilde{S}_1(t) = \tilde{S}_{1T} > 0, \\ \lim_{t \rightarrow T^-} \tilde{S}_2(t) = \tilde{S}_{2T}. \end{cases} \quad (15)$$

如果 $T < \infty$, 则 $x_2(T) = 0$. 由 (10), (11)

$$\tilde{S}_{2T} = \tilde{S}_{1T} > 0.$$

如果 $T = \infty$, 必有 $x_{1T} > 0$. 不然, $x_{1T} \leq 0$. 由 (10), (15), 存在 $x_{2\min} > 0$, 使 $x_2(t) \geq x_{2\min}$. 由 (14a), $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \infty$. 与反设矛盾. 从而有 $\tilde{S}_{2T} \geq x_{1T} > 0$.

根据连续函数介值定理, 存在唯一 $t_2 \in (t_1, T)$ 使 $\tilde{S}_2(t_2) = 0$. 在 (t_1, t_2) 上, 轨线在角形域 $\{X | \tilde{S} < 0, x_2 > 0\}$ 中运动. 在 t_2 时刻的状态记为 $X(t_2)$. 又由控制律 (9), 在 t_2 时刻, 控制切换为 $u = -1$. 系统 (3) 为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (16a)$$

$$\dot{x}_2 = -1 + f(x_1, x_2, t). \quad (16b)$$

以 $X(t_2)$ 为初值, 在 $[t_2, \infty)$ 上 (16) 存在唯一连续解, 不妨再记为 $X(t)$. 仍记

$$T = \inf_{t \in [t_2, \infty)} \{t | x_2(t) = 0\}.$$

由 (16b) 及条件 (2), $T < \infty, \lim_{t \rightarrow T^-} x_2(t) = 0$.

在 $[t_2, T)$ 上, $x_2(t) > 0$, 而且 $\dot{x}_1(t) > 0, \dot{\tilde{S}}_1(t) < 0, \dot{\tilde{S}}_2(t) < 0$. $x_1(t)$ 为严格增加函数, $\tilde{S}_1(t), \tilde{S}_2(t)$ 为严格减少函数. 在 T 点均有极限. 仍记

$$\lim_{t \rightarrow T^-} x_1(t) = x_{1T}, \quad \lim_{t \rightarrow T^-} \tilde{S}_1(t) = \tilde{S}_{1T}, \quad \lim_{t \rightarrow T^-} \tilde{S}_2(t) = \tilde{S}_{2T} < 0.$$

由 (10), (11) $\tilde{S}_{1T} = \tilde{S}_{2T} < 0$.

因为 $\tilde{S}_1(t_2) > 0$, 故存在唯一 $t_3 \in (t_2, T)$, 使 $\tilde{S}_1(t_3) = 0$. 在 (t_2, t_3) 上, 轨线在角形域 $\{X | \tilde{S} < 0, x_2 > 0\}$ 中运动. t_3 时刻的状态为 $X(t_3)$.

在 t_3 时刻, 控制又切换为 $u = 0$. 继续上述过程, 得到单调增加的切换时间序列 $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. 此序列必有极限^[7], 或为有限值, 或为 ∞ . 记其极限为 t_c . 在 $[t_1, t_c)$ 上, 轨线恒在角形区域 $\{X | \tilde{S} \leq 0, x_2 > 0\}$ 中运动. 当 n 为奇数时, $X(t_n)$ 在 $\tilde{S}_1 = 0$ 上; 当 n 为偶数时, $X(t_n)$ 在 $\tilde{S}_2 = 0$ 上.

由于 $\dot{x}_1 = x_2 > 0, x_1(t)$ 为单调增加的负连续函数, 在 t_c 点必存在左极限, 记

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} x_1(t) = x_{1c}, \quad (17)$$

必有 $x_{10}=0$.

不然, 则 $x_{10}<0$. 由于 $\tilde{s}_1(t)\geq 0$, 由(10), 存在 $x_{2\min}>0$, 使 $x_2(t)>x_{2\min}>0$. 任意自然数 k

$$x_1(t_{2k-1}) = -\frac{4+\rho+\varepsilon}{2(\rho+\varepsilon)}x_2^2(t_{2k-1}), \quad x_1(t_{2k}) = -\frac{1}{2(1-\alpha)}x_2^2(t_{2k}).$$

于是

$$\lim_{k\rightarrow\infty} x_2(t_{2k-1}) = \sqrt{-\frac{2(\rho+\varepsilon)}{4+\rho+\varepsilon}x_{10}} = A > 0,$$

$$\lim_{k\rightarrow\infty} x_2(t_{2k}) = \sqrt{-2(1-\alpha)x_{10}} = B > 0.$$

由条件(12), $A < B$.

在 $[t_{2k-1}, t_{2k})$ 上, $u=0$, 系统(3)为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t). \end{cases} \quad (18)$$

于是

$$x_1(t_{2k}) - x_1(t_{2k-1}) > x_{2\min}(t_{2k} - t_{2k-1}),$$

$$x_2(t_{2k}) - x_2(t_{2k-1}) < \alpha(t_{2k} - t_{2k-1}).$$

$$\text{从而 } \lim_{k\rightarrow\infty} [x_1(t_{2k}) - x_1(t_{2k-1})] \geq \lim_{k\rightarrow\infty} [x_2(t_{2k}) - x_2(t_{2k-1})] \cdot \frac{x_{2\min}}{\alpha} = \frac{(B-A)x_{2\min}}{\alpha} > 0.$$

与(17)式矛盾. 反设不成立. 故

$$\lim_{t\rightarrow t_c^-} x_1(t) = x_{10} = 0.$$

由(11)式,

$$0 < x_2(t) \leq \sqrt{-2(1-\alpha)x_1(t)},$$

所以

$$\lim_{t\rightarrow t_c^-} x_2(t) = 0.$$

因此, 系统状态是收敛于原点的. 由于初始点可以是相平面上的任意点, 这种收敛还是全局的.

如果系统函数 f 含有不确定性, 只要条件(2)不被破坏, 控制律(9)仍使系统从任意点收敛于原点. 因此, 控制律(9)具有鲁棒性(对于状态的收敛性).

5 仿真算例

考虑飞船于月球上的软着陆时间-燃料最优控制问题. 飞船动力学模型为

$$\dot{x} = v, \quad (19a)$$

$$\dot{v} = \frac{p}{M}u - \frac{\mu}{(x+R)^2}, \quad (19b)$$

其中 x, v 分别为高度和垂直速度, μ 为月球引力常数, R 为月球半径, M 为飞船的总质量, p 为发动机推力. 质量变化方程为

$$\dot{M} = -K|u|.$$

飞船自时刻 $t=0$ 进入软着陆过程. 初始参数及有关常数见表 1.

表 1 计算参数

符号	$x(0)$	$v(0)$	p	$M(0)$	K	R	μ
数值	6000	-30	4000	1000	0.1	1.738×10^6	4.887×10^{12}
单位	m	m/s	N	kg	kg/s	m	m^3/s^2

性能指标取为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (1 + |u|) dt.$$

采用最优控制的方法,通过“坐标轮换法”^[8]求解两点边值问题,得到的结果见图 3 中“.....”表示的相轨迹. 最优控制的时间历程见图 4,性能指标 $J=152.1$,控制发生两次切换. 飞船首先由推力器加速下降,然后关闭推力器,自由下落,最后再由推力器制动,使飞船达到软着陆的目的.

采用反馈控制律(8),反馈信息取为 $x_1 = \frac{M_0}{p}x, x_2 = \frac{M_0}{p}v$,结果见图 3 中“----”表示的相轨迹,控制的时间历程见图 5,性能指标 $J=240.3$. 从图 3 可以看出,控制律(8)并没有使飞船达到软着陆的目的($x=0, |v|>0$). 这是因为控制律(8)没有计及月球引力加速度和飞船质量变化的影响,当飞船到达制动线时,制动发动机工作,如果没有月球引力加速度和飞船质量变化的影响,飞船将沿制动线(第四象限中的 $s_2=0$)到达原点,但是月球引力的影响,使得制动加速度变小了,当飞船到达制动线时,即使全力制动也不能使飞船到达月球表面时速度降为零. 如果仿真过程继续下去,轨线将到达第二象限中的闭线($s_1=0$)上. 按照控制律(8),系统关于 $s_1=0$ 满足变结构控制的可达性条件^[9]

$$s_1 \dot{s}_1 < 0.$$

因此系统将沿第二象限中的闭线 $s_1=0$ “滑动”到原点,相应地,控制将发生“开关颤振”(图 5 中的后一部分).

采用反馈控制律(9),反馈信息仍取为 $x_1 = \frac{M_0}{p}x, x_2 = \frac{M_0}{p}v$,控制律中的参数取为 $\alpha=0.45, e=2.5$,得到的结果见图 3 中的实线表示的相轨迹. 控制的时间历程见图 6. 性能指标 $J=154.1$,与最优控制的性能指标接近. 飞船达到了软着陆的目的,而且克服了系统的高频颤振. 当飞船接近月球表面时,相轨线到达第四象限角形区域的顶点附近(图 2),轨线由开线到闭线或由闭线到开线需要的时间变短,因此在控制历程的最后一段仍有几次开关指令出现(图 6). 如果发动机推力大小是可以连续变化的,当飞船接近月球表面时,改用 PID 控制模式,可以克服常值推力发动机在控制末端出现的频繁开关现象. 这里仅给出推力大小不可调节的控制结果. 有关 PID 控制和开关控制相结合的“双模控制”方法见于文[6,10].

6 结 论

本文给出了摄动双积分系统的时间-燃料次优反馈控制律,并对闭环系统趋于原点的收敛性进行了严格论证. 算例表明,此反馈控制律不仅克服了系统的颤振,而且对有关有界干

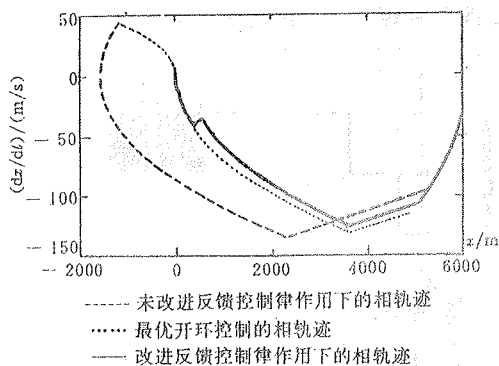


图 3 飞船高度与下降速度的相轨迹

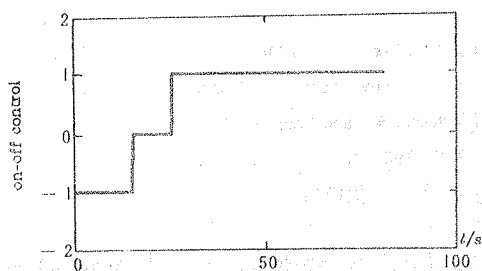


图 4 最优开环控制的时间历程

扰具有鲁棒性,对参数变化有一定的自适应能力,是一种较实用的反馈控制律。

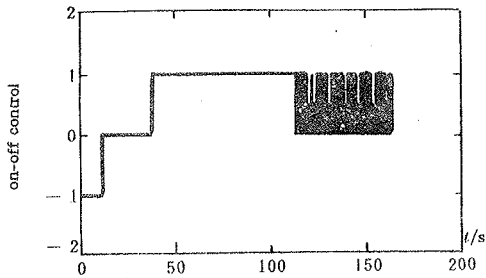


图5 未改进的反馈控制时间历程

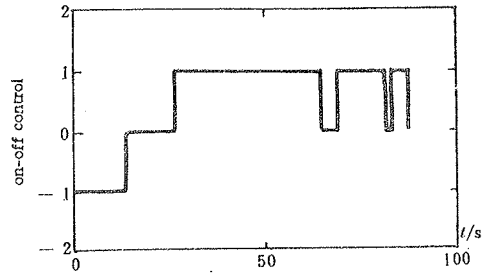


图6 改进的反馈控制时间历程

参 考 文 献

- [1] Flügge-Lotz, I. and Marbach, H.. The Optimal Control of Some Attitude Control Systems for Different Performance Criteria. Trans. ASME, J. Basic. Eng. 1963, (85), 165—176
- [2] Athans, M. and Falb, P. L.. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications. New York, McGraw-Hill, 1966
- [3] 解学书. 最优控制理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 1986, 210—214
- [4] Leitmann, G., 陈介山译. 最佳过程引论. 北京: 国防工业出版社, 1982, 130
- [5] 荆武兴, 杨淦, 吴瑶华. 相对运动有限推力轨道控制. 宇航学报, 1993, (2), 35—41
- [6] 钱学森, 宋健. 工程控制论, 上册. 北京: 科学出版社, 1980, 240—241
- [7] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌. 实变函数论与泛函分析, 上册. 北京: 高等教育出版社, 1985, 72—73
- [8] 蔡宣三. 最优化与最优控制. 北京: 清华大学出版社, 1983
- [9] 孙德滨, 程勉, 高为炳. 非线性变结构控制系统的综合. 自动化学报, 1989, (3), 248—253
- [10] 郑载满, 黄家喜. 采用滑模变结构控制的轨迹跟踪伺服系统. 黑龙江自动化技术与应用, 1989, (3), 18—22

Time-Fuel Suboptimal Control of Perturbed Double-Integrator System

JIANG Wuxing, CUI Pingyuan, YANG Di and WU Yaohua

(Department of Astronautic Engineering and Mechanics, Harbin Institute of Technology • Harbin, 110006, PRC)

Abstract: Time-fuel suboptimal control of perturbed double-integrator system $\dot{X} = f(x, x, t) + au$ is studied. A feedback control law without chattering is presented. Robust convergence of closed-loop system is proved. An example is given to illustrate feasibility of the control law.

Key words: double-integrator system; time-fuel optimal control; robust control; on-off control

本文作者简介

荆武兴 1965年生. 1986年毕业于河南师范大学, 1989年于哈尔滨工业大学获工学硕士学位, 现为哈尔滨工业大学讲师, 在职博士生. 主要感兴趣的研究方向为大系统分散控制, 不确定系统的鲁棒控制, 智能控制, 空间飞行器动力学与控制.

崔平远 1961年生. 1986年和1989年在哈尔滨工业大学分别获得硕士学位和博士学位, 1991年任副教授, 1993年任教授. 主要研究领域为非线性系统的微分几何理论, 飞行器参数估计与控制, 自适应控制等.

杨 淦 1937年生. 教授. 博士生导师. 主要研究方向为非线性系统控制, 智能控制, 武器系统制导与控制等.

吴瑶华 1926年生. 教授. 博士生导师. 主要研究方向为飞行器模型辨识, 大型空间飞行器动力学与控制等.