随机半离散人口系统的稳定性分析

倪岳锋
(清华大学自动化系·北京,100084)

摘要：本文研究了随机半离散人口系统均值和二阶中心矩的 Lyapunov 稳定性.

关键词：随机半离散人口系统；稳定性；妇女临界生育率

1 引 言

近年来,自然科学研究中的各种方法和手段不断被引入人口领域,以探讨人口发展过程的内部机理,为科学地制定人口政策提供参考.

人口控制论认为[1]:确定型人口系统存在一临界生育率,当妇女总和生育率大于、等于、小于临界值时,人口系统在 Lyapunov 意义下分别不稳定、临界稳定、渐近稳定.

随着随机人口理论研究的不断深入[2~4],对随机人口系统各阶矩特别是均值和二阶中心矩的分析引起注意.本文通过对随机半离散人口系统的分析发现其均值和二阶中心矩均存在稳定性问题,临界点由死亡概率、生育概率、女性概率和按龄递进概率决定.

对随机人口系统的分析,丰富了人口理论,同时具有实用价值.例如对二阶中心矩的分析使人们在进行人口预测的同时对预测偏差作出估计等.

2 随机人口系统的半离散模型

假设 m 为某人口系统中人能活到的最大年龄,时刻 t 按龄人口均值为 $\bar{n}_0(t),\bar{n}_1(t),\cdots,\bar{n}_m(t)$,按龄死亡概率为 $u_i(t)$,按龄女性概率为 $r_i(t)$,$i=0,1,\cdots,m$;a_1,a_2 分别为妇女最低、最高育龄,妇女按龄生育概率为 $\beta_p(t)h_{pi}(t)$,$i=a_1,a_1+1,\cdots,a_2$;$\beta_p(t)$表示总和生育率,$h_{pi}(t)$表示生育模式,它满足规格化条件 $\sum_{i=a_1}^{a_2}h_{pi}(t)=1$;婴儿死亡概率为 $u_{00}(t)$,按龄递进概率为 $g_{pi}(t)$;迁入、迁出概率分别以 $w_i(t),v_i(t)$表示,$i=0,1,\cdots,m$.关于随机半离散人口系统均值和二阶中心矩的微分方程模型为[5]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\bar{n}(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_p(t)+\beta_p(t)B_p(t) & \\ D(t) & (A_p(t)+\beta_p(t)B_p(t))\oplus(A_p(t)+\beta_p(t)B_p(t))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{n}(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F(t)\\ E(t)\end{bmatrix}. \tag{1}$$

其中 $\oplus$表示 Kronecker[6]和

$$\bar{n}(t)=[\bar{n}_0(t),\bar{n}_1(t),\cdots,\bar{n}_m(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\sigma(t)=[\sigma_{00}(t),\sigma_{01}(t),\cdots,\sigma_{0m}(t),\sigma_{10}(t),\sigma_{11}(t),\cdots,\sigma_{1m}(t),\cdots,\sigma_{m0}(t),\sigma_{m1}(t),\cdots,\sigma_{mm}(t)]^{\mathrm{T}}.$$

$\sigma_{ii}(t)$为随机变量 $n_i(t)$的方差,$\sigma_{ij}(t)$为随机变量 $n_i(t),n_j(t)$之间的协方差,$i,j=0,1,\cdots,m;i$

本文于1993年3月15日收到. 1993年9月13日收到修改稿.

$\neq j$,

$$A_p(t)=\begin{bmatrix} -(u_0(t)+g_{p0}(t)) & & & \\ g_{p0}(t) & -(u_1(t)+g_{p1}(t)) & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & & g_{p,m-1}(t) & -(u_m(t)+g_{pm}(t)) \end{bmatrix},$$

$$B_p(t)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & (1-u_{00}(t))r_{a_1}(t)h_{pa_1}(t) & \cdots & (1-u_{00}(t))r_{a_2}(t)h_{pa_2}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & & & & \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)},$$

$$F(t)=[(w_0(t)-v_0(t)),(w_1(t)-v_1(t)),\cdots,(w_m(t)-v_m(t))]^{\mathrm{T}},$$

$$E(t)=\mathrm{diag}[(w_0(t)+v_0(t)),(w_1(t)+v_1(t)),\cdots,(w_m(t)+v_m(t))],$$

$$D(t)=[D_0(t),D_1(t),\cdots,D_m(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$D_0(t)=\begin{bmatrix} (u_0(t)+g_{p0}(t)) & 0 & \cdots & 0 & \beta_p(t)(1-u_{00}(t))r_{a_1}(t)h_{pa_1}(t) & \cdots & \beta_p(t)(1-u_{00}(t))r_{a_2}(t)h_{pa_2}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -g_{p0}(t) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & & & & \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)},$$

$$D_i(t)=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & 0 & \\ \vdots & -g_{p,i-1}(t) & & \vdots \\ & g_{p,i-1}(t) & (u_i(t)+g_{pi}(t)) & \\ \vdots & & -g_{pi}(t) & \vdots \\ & 0 & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)} \\ \text{第}\,i+1\,\text{列} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{第}\,i+2\,\text{行} \\ \\ \\ \end{array} ,\quad i=1,2,\cdots,m-1,$$

$$D_m(t)=\begin{bmatrix} & & 0 & & \\ 0 & \vdots & 0 & -g_{p,m-1}(t) & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & g_{p,m-1}(t) & (u_m(t)+g_{pm}(t)) \end{bmatrix}_{(m+1)\times(m+1)}$$

在一个比较安定的社会里，死亡概率、生育概率、迁移概率及按龄递进概率随时间 t 的变化缓慢，本文将研究进行了一次近似的常系数情况，此时模型(1)简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\bar{n}(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_p+\beta_pB_p & 0\\ D & (A_p+\beta_pB_p)\oplus(A_p+\beta_pB_p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{n}(t)\\ \sigma(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F\\ E\end{bmatrix}. \tag{2}$$

由方程(2)看出，关于均值的发展方程与二阶中心矩无关，可单独表示成

$$\dot{\bar{n}}(t)=(A_p+\beta_pB_p)\bar{n}(t)+F. \tag{3}$$

3 随机半离散人口系统稳定性分析

矩阵$(A_p+\beta_pB_p)$的特征多项式为

$$\begin{aligned}\Delta(s)&=\det[sI-(A_p+\beta_pB_p)]\\ &=\prod_{i=0}^{m}(s+u_i+g_{pi})\end{aligned}$$

$$- \beta_p \sum_{i=a_1}^{a_2} [r_i h_{pi} g_{p0} g_{p1} \cdots g_{p,i-1} (1 - u_{00})(s + u_{i+1} + g_{p,i+1}) \cdots (s + u_m + g_{pm})]. \quad (4)$$

令
$$\beta_{pcr} = [\sum_{i=a_1}^{a_2} r_i h_{pi} g_{p0} g_{p1} \cdots g_{p,i-1} (1 - u_{00})(u_0 + g_{p0})^{-1} \cdots (u_i + g_{pi})^{-1}]^{-1}.$$

β_{pcr}称为妇女临界生育率,其概率意义参见下文.

引理 1 设$(A_p+\beta_p B_p)$为$(m+1)$阶方阵,其特征值为$s_i, i=0,1,\cdots,m$,则

$$s_{ij} = s_i + s_j, \quad i,j = 0,1,\cdots,m$$

是矩阵$(A_p+\beta_p B_p)\oplus(A_p+\beta_p B_p)$的特征值.

证 设T为$(m+1)$阶可逆方阵,使

$$T^{-1}(A_p + \beta_p B_p)T = J = \mathrm{diag}[J_1, \cdots, J_r],$$

其中J为矩阵$(A_p+\beta_p B_p)$的 Jordon 标准形,$J_i, i=1,2,\cdots,r$为矩阵$(A_p+\beta_p B_p)$的 Jordon 块,由于

$$\begin{aligned}&(T \otimes T)^{-1}[(A_p + \beta_p B_p) \oplus (A_p + \beta_p B_p)](T \otimes T)\\ =&[T^{-1}(A_p + \beta_p B_p)T] \oplus [T^{-1}(A_p + \beta_p B_p)T]\\ =&J \oplus J,\end{aligned}$$

上式中$\otimes$表示 Kronecker 积[6]. 显然$J\oplus J$是一个上三角矩阵,其特征值即为其对角线元,它们依次为

$$\begin{aligned}&2s_0,\ s_0 + s_1,\ s_0 + s_2,\ \cdots,\ s_0 + s_m,\\ &s_1 + s_0,\ 2s_1,\ s_1 + s_2,\ \cdots,\ s_1 + s_m,\ \cdots,\\ &s_m + s_0,\ s_m + s_1,\ s_m + s_2,\ \cdots,\ 2s_m\end{aligned}$$

共$(m+1)^2$个. 由相似矩阵特征值相同知引理的结论成立. 证毕.

引理 2 1) 当$0<\beta_p<\beta_{pcr}$时,矩阵$(A_p+\beta_p B_p)$的每个特征值的实部小于 0;

2) 矩阵$(A_p+\beta_p B_p)$有代数重数为 1 的特征值 0,其每个非零特征值的实部均小于 0;

3) 当$\beta>\beta_{pcr}$时,矩阵$(A_p+\beta_p B_p)$有正特征值.

证 1) 当$0<\beta_p<\beta_{pcr}$时,设$s=a+bi$为矩阵$(A_p+\beta_p B_p)$的特征值,则

$$\begin{aligned}\beta_p &= |[\sum_{j=a_1}^{a_2} r_j h_{pj} g_{p0} g_{p1} \cdots g_{p,j-1} (1 - u_{00})(s + u_0 + g_{p0})^{-1} \cdots (s + u_j + g_{pj})^{-1}]^{-1}|\\ &= |[\sum_{j=a_1}^{a_2} r_j h_{pj} g_{p0} g_{p1} \cdots g_{p,j-1} (1 - u_{00}) \rho_0^{-1} \cdots \rho_j^{-1} e^{-i(\varphi_0 + \cdots + \varphi_j)}]^{-1}|.\end{aligned}$$

式中
$$\rho_j = \sqrt{(a + u_j + g_{pj})^2 + b^2},$$
$$\varphi_j = \mathrm{tg}^{-1} \frac{b}{a + u_j + g_{pj}}, \quad j = 0,1,\cdots,a_2.$$

如果$a=b=0$,则$\beta_p=\beta_{pcr}$,与假设条件$\beta_p<\beta_{pcr}$矛盾;

如果$a>0$;或$a=0, b\neq 0$;则

$$\beta_p \geqslant |[\sum_{j=a_1}^{a_2} r_j h_{pj} g_{p0} \cdots g_{p,j-1} (1 - u_{00}) \rho_0^{-1} \cdots \rho_j^{-1}]^{-1}|$$

$$>|[\sum_{j=a_1}^{a_2} r_j h_{pj} g_{p0}\cdots g_{p,j-1}(1-u_{00})(u_0+g_{p0})^{-1}\cdots(u_j+g_{pj})^{-1}]^{-1}|=\beta_{pcr}.$$

同样与假设条件 $\beta_p<\beta_{pcr}$ 矛盾，因而只能 $a<0$，记为 $\mathrm{Re}s<0$.

2) 由 β_{pcr} 的定义，有

$$\det(A_p+\beta_{pcr}B_p)=0.$$

故 0 是矩阵 $(A_p+\beta_{pcr}B_p)$ 的特征值.

由式(4)，有

$$\Delta(0)=\prod_{k=0}^{m}(u_k+g_{pk})-\beta_{pcr}\sum_{i=a_1}^{a_2}(r_i h_{pi} g_{p0}\cdots g_{p,i-1}(1-u_{00})\prod_{k=i+1}^{m}(u_k+g_{pk}))=0.$$

从而

$$\Delta'(0)=\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{u_j+g_{pj}}\prod_{k=0}^{m}(u_k+g_{pk})\right)-\beta_{pcr}\sum_{i=a_1}^{a_2}[r_i h_{pi} g_{p0}\cdots g_{p,i-1}\sum_{j=i+1}^{m}\frac{1}{u_j+g_{pj}}\prod_{k=i+1}^{m}(u_k+g_{pk})]$$

$$>\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{u_j+g_{pj}}\prod_{k=i+1}^{m}(u_k+g_{pk})-\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{u_j+g_{pj}}\beta_{pcr}\sum_{i=a_1}^{a_2}[r_i h_{pi} g_{p0}\cdots g_{p,i-1}\prod_{k=i+1}^{m}(u_k+g_{pk})]=0.$$

故 0 是矩阵 $(A_p+\beta_p B_p)$ 的代数单特征值.

同证明 1)类似可证矩阵 $(A_p+\beta_{pcr}B_p)$ 其余特征值的实部均小于 0.

3) 矩阵 $(A_p+\beta_p B_p)$ 的特征多项式

$$\Delta(s)=[\prod_{k=0}^{m}(s+u_k+g_{pk})]$$

$$\cdot[1-\beta_p\sum_{i=a_1}^{a_2} r_i h_{pi} g_{p0}\cdots g_{p,i-1}(1-u_{00})(s+u_0+g_{p0})^{-1}\cdots(s+u_i+g_{pi})^{-1}]$$

是 $s(\geqslant 0)$ 的连续函数.

由题设 $\beta_p>\beta_{pcr}$，因而

当 $s=0$ 时，$\Delta(s)=(\prod_{k=0}^{m}(u_k+g_{pk}))(1-\beta_p\beta_{pcr}^{-1})<0$；

当 $s\to+\infty$ 时，$\Delta(s)\to+\infty$.

由连续函数的基本性质知 $\Delta(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 中有一根 $s(\beta_p)>0$. 证毕.

定理 1 1) 当 $\beta_p>\beta_{pcr}$ 时，按龄人口均值和二阶中心矩在 Lyapunov 意义下不稳定；

2) 当 $\beta_p=\beta_{pcr}$ 时，在 Lyapunov 意义下按龄人口均值临界稳定，二阶中心矩不稳定；

3) 当 $0<\beta_p<\beta_{pcr}$ 时，按龄人口均值和二阶中心矩在 Lyapunov 意义下渐近稳定.

证 1) 当 $\beta_p>\beta_{pcr}$ 时，根据引理 1 和 2，矩阵 $(A_p+\beta_p B_p)$ 有正特征值 $s(\beta_p)$，矩阵 $(A_p+\beta_p B_p)\oplus(A_p+\beta_p B_p)$ 有正特征值 $2s(\beta_p)$，因而系统(2)不稳定，即按龄人口均值和二阶中心矩在 Lyapunov 意义下不稳定.

2) 当 $\beta_p=\beta_{pcr}$ 时，由引理 2，矩阵 $(A_p+\beta_p B_p)$ 有代数重数为 1 的特征值 0，它其余的特征值 s 均有 $\mathrm{Re}s<0$，由方程(3)知按龄人口均值在 Lyapunov 意义下临界稳定.

由引理 1 知相应于矩阵 $(A_p+\beta_p B_p)$ 的特征值 $s(\beta_{pcr})=0$，矩阵 $(A_p+\beta_{pcr}B_p)\oplus(A_p+\beta_{pcr}B_p)$ 有代数单特征值 $2s(\beta_{pcr})=0$，对于方程(2)，0 是二重特征值，且从方程的结构易知对应于 0 特征值的 Jordon 块是二阶的，因而系统在 Lyapunov 意义下不稳定，即二阶中心

矩不稳定.

3) 当 $0<\beta_r<\beta_{pcr}$ 时，根据引理 1 和 2，矩阵 $(A_r+\beta_r B_r)$ 的每个特征值 s 均有 $\mathrm{Re}s<0$，矩阵 $(A_r+\beta_r B_r)\oplus(A_r+\beta_r B_r)$ 的每个特征值 s 也有 $\mathrm{Re}s<0$，系统(2)在 Lyapunov 意义下渐近稳定.　　证毕.

4 结束语

由定理 1 我们知道，随机人口系统均值稳定性结论与确定型人口系统稳定性理论相符，这与习惯上的认识是一致的.

对于增长型的人口系统($\beta_r>\beta_{pcr}$ 时)，由于二阶中心矩发散，进行中长期人口预测时，对预测误差应给予足够的重视.

均值临界稳定的人口系统($\beta_r=\beta_{pcr}$ 时)，由于方差发散，随着时间的推移，人口数距均值稳定点的偏差将可能逐渐增大，因此对处于均值临界稳定的人口系统仍有必要进行人口普查. 若要保证人口不会无限增长，应调整人口政策使总和生育率稍低于临界生育率.

致谢　本文是在导师宋健教授、副导师于景元教授、夏绍纬教授指导下完成的，得到了朱广田研究员、韩京清研究员的帮助，作者在此深表感谢.

参 考 文 献

[1] 宋健，于景元. 人口控制论. 北京：科学出版社，1985，1—275

[2] Getz, W. M.. Optimal Control of a Birth-and-Death Processes Population Model. Math. Biosci, 1975, 23:87—111

[3] Pollard, J. H.. Mathematical Model for the Growth of Human Populations. London: Cambridge University Press, 1975, 1—135

[4] Biswas, S. and Ebraheem, N. A.. Method of Stochastic Prediction of Population Estimates Based on Kendall's Birth-and-Death Processes. Int. J. Systems Sci., 1989, 20:323—329

[5] 倪岳锋. 人口系统的半离散模型. 系统工程学报. 1993, 2

[6] 韩京清，何关钰，许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳：辽宁科学技术出版社，1985，313—396

On Stability of Stochastic Semi-Discrete Population Systems

NI Yuefeng

(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: This paper discusses the Lyapunov stability of the mean and second central moment of stochastic semi-discrete population systems.

Key words: stochastic semi-discrete population system; critical fertility rate of females; stability

本文作者简介

倪岳锋　1964 年生. 1984 年和 1987 年在合肥工业大学分别获工学学士和硕士学位，1990 年至 1993 年在清华大学攻读系统工程专业博士学位. 现任青岛市科委主任助理. 研究兴趣为电子技术、控制理论和大系统理论及应用.