第 11 卷第 6 期
1994 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 11, No. 6
Dec., 1994

非线性系统的对称性与线性化*

洪奕光　秦化淑
(中国科学院系统科学研究所·北京，100080)

摘要：本文考察具有对称结构的仿射非线性控制系统的零动态与精确线性化之间的关系．结果表明，对一类关于群对称的仿射非线性控制系统，能够得到它的低维零动态，从而在系统研究和设计中便于问题的简化．特别，文中指明了一个有意义的事实：具有关于线性群或自由适当群对称结构的仿射非线性控制系统不能通过状态反馈实现精确线性化．

关键词：对称性；相对阶；零动态；反馈线性化

1 引　言

随着新观点、新工具的引入，非线性控制系统的研究逐步深入，进而能处理的问题更多．目前有不少非线性系统的分析、综合和设计方法，其共同点是，对复杂的非线性控制系统先进行化简，使之转换成具有特殊形式低阶系统后再做进一步研究．本文将考察两种简化途径：线性化与对称分析，以及它们之间的关系．

精确线性化是一个研究了多年的问题，已有许多精彩的结果．由于文 [6] 说明绝大部分非线性系统几乎都不可反馈精确线性化．于是通常人们考虑部分线性化，这里涉及到系统的零动态．零动态概念最初由 Byrmes，Isidori 等人提出[1,8]．近年来，零动态的特性以及它对系统稳定性的作用日益为人们认识，从而被广泛地应用并进一步研究[1,2]．本文对具有对称结构信息非线性系统，深入研究其零动态的性质、线性化问题以及它们之间的关系．

考察单输入单输出仿射非线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x\in M$(M 维流形)；$u\in U\subset\mathscr{R}^l$；$f(x),g(x)$是定义在 M 上的光滑向量场．

令 $x_0\in M$．系统(1.1)的相对阶 $r(x_0)$(或简记为 r)定义如下：

$$r(x_0) = \min\{k\,|\,L_gL_f^{k-1}h(x_0) \neq 0\} < +\infty.$$

如果存在 x_0 的一个邻域 $U_0\subset M$，使得 $r(x)=r(x_0)\forall\ x\in U_0$，则称 x_0 是系统(1.1)的正则点．

系统(1.1)的零动态是在约束输出 $y(t)\equiv0$ 时系统的运动状态．这时的向量场为 $f(x)+g(x)u_0(x)|_{y(x)=0}$，这里 $u_0(x)$规定为

$$u_0(x) = -L_f^rh(x)/L_gL_f^{r-1}h(x). \tag{1.2}$$

易知，在正则点附近，可以选择一个局部坐标，使在此坐标下，系统(1.1)具有如下形

* 国家自然科学基金资助项目．
本文于1992年1月21日收到．1994年6月22日收到修改稿．

式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad\vdots \\ \dot{x}_{r-1} = x_r, \\ \dot{x}_r = L_f^r h(x) + (L_g L_f^{r-1} h(x))u, \\ \dot{x}^2 = \psi(x^1, x^2), \\ y = x_1. \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $x^1 = [x_1, x_2, \cdots, x_r]^T, \quad x^2 = [x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n]^T.$

而 $$\dot{x}^2 = \psi(0_r, x^2),$$

即为系统(1.1)的零动态，$0_r = [\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{r}]^T$.

系统对称性反映系统的某种不变性，它有助于对系统进行化简，近年来成为一个研究方向[3,5,9]. 假定 G 是一个连通子群，且存在一个左作用 $\varphi: G \times M \to M$，$(\tau, x) \to \Phi_\tau(x)$，$\forall\ \tau \in G$.

定义 1.1[3] 称系统(1.1)是对称的，如果对 $\forall\ x \in M, u \in U, \tau \in G$，有

$$(\Phi_\tau)_* f(x) = f(\Phi_\tau(x)), \tag{1.4a}$$

$$(\Phi_\tau)_* g(x) = g(\Phi_\tau(x)), \tag{1.4b}$$

$$h(x) = h(\Phi_\tau(x)). \tag{1.4c}$$

若不考虑输出的对称条件(1.4c)，则系统(1.1)是状态对称系统.

2 对称系统与相对阶

本节涉及的群是自由适当群，对于对称系统(1.1)引入商系统概念.

定义 2.1[3] 假定 G 是自由适当群，映射 $P: M \to M/G$ 有一个全局截面 $\sigma: M/G \to M$ 这时下列系统：

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})u \triangleq P_*[f(\sigma(\tilde{x})) + g(\sigma(\tilde{x}))u], \tag{2.1a}$$

$$\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}) \triangleq h(\sigma(\tilde{x})) \tag{2.1b}$$

称为对称系统(1.1)的定义在商流形 M/G 上的商系统. 其中 $\tilde{x} = P(x) \in M/G$.

易知 $$P_*[f(\sigma(\tilde{x})) + g(\sigma(\tilde{x}))u] = P_*[f(x) + g(x)u],$$
$$h(\sigma(\tilde{x})) = h(x) = y.$$

于是系统(2.1)可写成：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = P_*[f(x) + g(x)u] = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})u, \\ y = h(x) = \tilde{h}(\tilde{x}); \quad \tilde{x} \in M/G. \end{cases} \tag{2.2}$$

进一步能够证明：

定理 2.2 对称系统(1.1)与其商系统在对应点(x 与 $\tilde{x} = P(x)$)处具有相同的相对阶.

若系统(1.1)的相对阶是 r，则它可部分线性化出一个 r 阶线性系统. 由定理 2.2 知，若群 G 的维数是 $m-r$，则商系统(2.2)必可反馈线性化.

定理 2.3 若系统(1.1)关于群 G 对称，则其零动态也关于群 G 对称.

证　由上节知(1.1)的零动态的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) - g(x)L_f^r h(x)/L_g L_f^{r-1}h(x), \\ y = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

注意(2.3)是定义在子流形 $\mathscr{Z}^* \triangleq \{x \mid h(x) = L_f h(x) = \cdots L_f^{r-1}h(x) = 0\}$ 上的系统.

令 Φ 是一个左作用, $\tau \in G$, 设 $x \in \mathscr{Z}^*$, Φ_τ 对 x 作用后的点为 $\Phi_\tau(x)$, 利用对称性定义(1.4)有

$$h(\Phi_\tau(x)) = h(x) = 0,$$

$$L^j_{f(\Phi_\tau(x))}h(\Phi_\tau(x)) = L^j_{f(x)}h(x) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,r-1.$$

即 Φ_τ 对 $\mathscr{Z}^*$ 的点作用后的点仍在 $\mathscr{Z}^*$ 上, 于是 G 在 $\mathscr{Z}^*$ 上有作用, 又

$$(\Phi_\tau)_*[f(x) - g(x)L_f^r h(x)/L_g L_f^{r-1}h(x)]$$
$$= f(\Phi_\tau(x)) - g(\Phi_\tau(x))L^r_{f(x)}h(x)/L_{g(x)}L^{r-1}_{f(x)}h(x)],$$

依(1.1)的对称性可得

$$\begin{cases} L^r_{f(x)}h(x) = L^r_{f(\Phi_\tau(x))}h(\Phi_\tau(x)), \\ L_{g(x)}L^{r-1}_{f(x)}h(x) = L_{g(\Phi_\tau(x))}L^{r-1}_{f(\Phi_\tau(x))}h(\Phi_\tau(x)), \end{cases}$$

于是有　$$(\Phi_\tau)_*[f(x) + g(x)u_0(x)] = f(\Phi_\tau(x)) + g(\Phi_\tau(x))u_0(x).$$

即系统(2.3)关于 G 在 $\mathscr{Z}^*$ 上对称.

对于多输入多输出仿射非线性系统, 有类似结论, 限于篇幅不再列出. 而关于向量相对阶的概念可见文献[7,8].

3　对称性与精确线性化

本节就单输入单输出对称系统分析其精确线性化问题, 对于多输入系统, 其结论类似.

由上节定理2.2知, 对自由适当群对称的系统是不可反馈线性化的, 除非群 G 的维数是零, 下面考虑一种常见的非自由群, 即线性对称群.

定义 3.1　称单输入系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{3.1}$$

为具有(状态)线性对称性, 如果它在一般线性群 $GL(n,\mathscr{R})$ 的某一子群 G 的作用下不变, 即 $\forall\ \tau \in G \subset GL(n,\mathscr{R})$ 有

$$\tau_*(f(x)) = f(\tau(x)), \tag{3.2}$$

$$\tau_*(g(x)) = g(\tau(x)). \tag{3.3}$$

这里群作用为线性变换 $\tau: x \to \tau x$. 若系统有输出并给出如(1.4c)的输出对称条件, 则系统是线性对称的.

命题 3.2　假定系统(3.1)关于连通群状态线性对称, 则它不满足可控性秩条件, 有

$$\dim\{f,g\}_{LA} < n.$$

证　若系统(3.1)有一个连通对称群 G, 那么其李代数记为 $\mathfrak{g}$ 不是零. 取 $V \in \mathfrak{g}$, 且 $V \neq 0$, 即有

$$(e^{Vt})_* f(x - x_0) = f(e^{Vt}(x - x_0)). \tag{3.4}$$

这里 x_0 是流形 M 上某个所考虑的点, 用与[2]中类似的方法, 对(3.4)式两端对 t 求微商

并令 $t=0$ 得

$$[V(x-x_0),f]=0,$$

类似有

$$[V(x-x_0),g]=0.$$

由 Jacobi 恒等式[7]知，对任一 $\omega\in\{f,g\}_{LA}$有

$$[V(x-x_0),\omega]=0.$$

如果 $\dim\{f,g\}_{LA}=n$，这时存在 $\omega_i\in\{f,g\}_{LA}, i=1,2,\cdots,n$ 使得 $\omega_i(x_0)(i=1,2,\cdots,n)$是线性独立的，且

$$\omega_i(x)=\omega_i(x_0)+O(\|x-x_0\|),$$

于是可得

$$[V(x-x_0),\omega_i(x)]=-V\omega_i(x_0)+O(\|x-x_0\|)=0.$$

因此

$$V(\omega_1(x_0),\omega_2(x_0),\cdots,\omega_n(x_0))=0.$$

这说明 $V=0$，矛盾，命题得证.

由于可精确线性化的条件之一是满足可控条件，因此综上所述可得

定理 3.3 若仿射非线性系统(1.1)关于线性群或自由且适当群对称，那么它是不可反馈精确线性化的.

其实，定理 3.3 的结论在一定条件下可推广到其它连通群对称的仿射非线性系统.

考虑到文[6]中已指明，可反馈线性化系统组成的集合是 Whitney 拓扑下的零测集，同样由命题 3.2 能够证明：

定理 3.4 对于任给定的一个单输入仿射非线性系统，它是关于线性群对称的可能性几乎是零.

不过，正如[6]的结果不能说明研究反馈精确线性化不是无意义的一样，定理 3.4 也不表明研究线性对称性就没有意义.

致谢 本文作者感谢东北大学张嗣瀛教授与赵军博士在非线性系统对称性问题上的指教和讨论.

参考文献

[1] Byrnes, C. I. and Isidori, A.. Local Stabilization of Minimum-Phase Nonlinear Systems, Systems & Control Letters 11, 1988, 9—11

[2] Cheng, D.. Design of Zero Dynamics for a Class of Nonlinear Systems. Book of Abstracts MTNS-91. Kobe, Japan June, 1991

[3] Jun Zhao and Siying Zhang. On the Reachability of Nonlinear Systems with Generalized Symmetries. Preconference to MTNS-91. Hangzhou, China June, 1991

[4] Boothby, W.. An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, Inc. 1986

[5] Abraham, R. and Marsden, J. E.. Foundation of Mechanics. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978

[6] 程代展. 綦化淑，李树荣. 非线性控制系统的拓扑结构. 自动化学报，1991，17(2)：129—136

[7] 程代展. 非线性控制系统几何理论. 北京：科学出版社，1988

[8] Isidori, A.. Nonlinear Control Systems：An Introduction, Spinger-Verlag, 1989

[9] 赵军. 非线性控制系统对称性结构的研究. 东北大学自动控制系博士论文，1991

Symmetry and Linearization of Nonlinear Control Systems

HONG Yiguang　and　QIN Huashu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: The relationship between the zero-dynamics and exact linearization for affine nonlinear systems with symmetric structure is studied in this paper. The results show that it is able to get a lower-dimensional zero-dynamics for a class of group-symmetric affine nonlinear systems. Particularly, the interesting fact in following is obtained: affine nonlinear control systems with some kinds of symmetric structure can not be exactly linearized via state feedback.

Key words: symmetry; relative degree; zero-dynamics; linearization

本文作者简介

洪奕光　见本刊 1994 年第 4 期第 427 页.

秦化淑　见本刊 1994 年第 1 期第 68 页.

第六届全国青年计算机会议(NCYCS'96)
征文通知

中国计算机学会主办的青年人系列学术会议，已正式委托浙江大学承办第六届全国青年计算机会议(NCYCS'96). 会议主席由陈纯教授担任. 此次大会初定于 1996 年 10 月在杭州地区(富春江畔)举行. 会议将邀请著名专家作专题综述或产业形势报告，组织学科前沿领域专题讨论，并拟举办计算机成果展示会. 热诚欢迎全国从事计算机科学与工程应用的青年工作者踊跃投稿，参与会议. 有关事项通知如下：

一、征文范围：

• 计算机科学理论 • 计算机体系结构 • 并行与分布处理 • 软件工程 • 数据库系统 • 网络与通讯 • 人工智能与知识工程 • 计算机应用 • 图形与图象处理 • 计算机安全与保密 • 器件与 VLSI 技术 • 文字信息处理 • 多媒体技术 • CAD/CAM/CAI • 计算机科学技术与产业

二、征文要求：

• 第一作者年龄不大于 40 岁.
• 来稿需是未公开发表过的论文.
• 一式三份，注明所属领域，中英文摘要并附关键词，字数不超过 6000 字.
• 全文自留底稿.
• 来稿附详细通讯地址和联系电话.

三、截止日期：1996 年 1 月 1 日

四、投稿地址

地　址：杭州浙江大学计算机系(310027)　联系人：杨　云　何软铭　(请在信封注明 NCYCS'96)

电　话：0571－5172244 转 2578，2362

NCYCS'96 筹委会　(浙大计算机系)